

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

**ANALISI QUALITATIVA  
DEL MOTO UNIDIMENSIONALE  
E OSCILLAZIONI NON LINEARI**

---

TESI DI LAUREA IN FISICA MATEMATICA

---

**Relatore:**  
**Prof.**  
**EMANUELA CALICETI**

**Presentata da:**  
**FRANCESCA GIOSA**

---

Sessione I  
ANNO ACCADEMICO 2015-2016



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Richiami sui principi generali della meccanica</b>	<b>1</b>
1.1 Principi generali della meccanica . . . . .	2
<b>2 Analisi qualitativa del moto unidimensionale: discussione alla Weierstrass</b>	<b>7</b>
2.1 Dinamica del pendolo ideale . . . . .	7
2.2 Discussione qualitativa alla Weierstrass . . . . .	9
2.3 Applicazione dell'analisi alla Weierstrass al pendolo semplice . . . . .	13
2.4 Applicazione della discussione alla Weierstrass al pendolo sferico . . . . .	16
<b>3 Discussione qualitativa attraverso il diagramma di fase</b>	<b>19</b>
3.1 Diagramma di fase . . . . .	19
3.2 Curve di livello dell'energia . . . . .	23
3.3 Diagramma di fase per l'oscillatore armonico semplice . . . . .	33
3.4 Diagramma di fase del pendolo semplice . . . . .	33
<b>4 Metodo delle approssimazioni successive e delle perturbazioni</b>	<b>37</b>
4.1 Metodo delle approssimazioni successive . . . . .	37
4.2 Metodo delle perturbazione . . . . .	41
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Introduzione

Un sistema meccanico è descritto da equazioni differenziali spesso non lineari. Nel maggior numero dei casi tali equazioni non sono risolubili per via analitica e quindi si ricorre all'analisi qualitativa del moto, che permette di ricavare informazioni su di esso senza integrare le equazioni.

Nella presente tesi verranno studiati alcuni metodi qualitativi per analizzare il moto unidimensionale di un punto materiale. Questo argomento è di particolare interesse perchè permette di risolvere problemi apparentemente molto complessi attraverso metodi che semplificano notevolmente i passaggi per giungere alla soluzione. Inoltre, è bene osservare che questi metodi di approccio alle equazioni differenziali ordinarie si sono sviluppati anche indipendentemente dallo studio di problemi meccanici e costituiscono una metodologia propria della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Per risolvere il problema e analizzare dei metodi risolutivi, la seguente tesi è articolata in quattro capitoli. Nel primo capitolo, tratto dal D.Graffi [2] e dagli appunti di S.Graffi [3], vengono richiamate le principali nozioni di meccanica necessarie per comprendere la trattazione successiva. Nel secondo capitolo, tratto dal D.Graffi [2], per prima cosa viene presentato il problema della dinamica del pendolo ideale che è l'esempio forse più tipico di un moto oscillatorio non lineare. A partire da questo problema specifico viene illustrato il primo metodo generale ovvero la discussione qualitativa alla Weierstrass, che permette di ricavare informazioni sul moto di un punto materiale che si muove di moto unidimensionale soggetto a forze conservative, a partire dalla legge di conservazione dell'energia totale. Viene poi utilizzato questo metodo sia per risolvere il problema del pendolo semplice (a un grado di libertà), sia per il pendolo sferico (a due gradi di libertà). Nel terzo capitolo, tratto da [4], si costruisce il diagramma di fase, che nel caso di punto materiale si riduce allo studio delle curve di livello dell'energia totale e permette di rappresentare lo stato del sistema in ogni istante di tempo. Nell'ultimo capitolo, basato sul trattato [1], vengono infine accennati altri due metodi più analitici per lo studio di oscillazioni non lineari: il metodo delle approssimazioni successive e il metodo delle perturbazioni.



# Capitolo 1

## Richiami sui principi generali della meccanica

In questo capitolo richiameremo alcune fondamentali definizioni e teoremi che saranno utili in seguito.

Premettiamo innanzitutto le principali notazioni di cui faremo uso nel seguito.

La scrittura

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

denota un **vettore** in  $\mathbb{R}^3$  rappresentato dalla classe di equivalenza di segmenti orientati aventi stesso modulo, direzione e verso di  $\overrightarrow{AB}$ .

Più precisamente si ha:

- $|\vec{a}|$  indica il modulo di  $\vec{a}$  e corrisponde alla lunghezza del segmento  $AB$
- la direzione di  $\vec{a}$  è quella della retta individuata da  $AB$
- il verso di  $\vec{a}$  è da  $A$  verso  $B$ .

Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio euclideo con origine in un punto  $O$ , il vettore  $\vec{a}$  algebricamente corrisponde alla terna ordinata di numeri reali

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

che rappresentano le coordinate del punto  $P$  tale che  $\vec{a} = P - O$ .

Dati due vettori  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  e  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  il loro prodotto scalare sarà così denotato:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Ricordiamo inoltre che il loro prodotto vettoriale  $\vec{a} \times \vec{b}$  è dato dal seguente determinante:

$$\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

se  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  è la base canonica in  $\mathbb{R}^3$ , cioè  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .

Passiamo ora a richiamare le nozioni principali alla base della meccanica.

## 1.1 Principi generali della meccanica

**Definizione 1.1.** Si definisce *configurazione di un corpo* l'insieme dei punti dello spazio  $\mathbb{R}^3$  occupati dai punti materiali che costituiscono il corpo stesso.

Per rappresentare la configurazione di un corpo (sistema meccanico), si deve individuare il suo **grado di libertà**  $n$ , ovvero il numero di parametri necessari e sufficienti a determinare la configurazione del corpo in ogni istante. Questi parametri vengono detti **parametri lagrangiani** e saranno rappresentati dalla  $n$ -pla:

$$q = (q_1, q_2 \dots q_n)$$

Un sistema meccanico si dice:

1. **Sistema libero**, se può passare dalla configurazione in cui si trova ad ogni altra configurazione vicina e geometricamente possibile.
2. **Sistema vincolato** se esistono dei dispositivi, chiamati **vincoli**, che impediscono al corpo di passare da una configurazione ad un'altra vicina.

Uno spostamento infinitesimo di un punto può essere

- **reale**, e si denota con  $dP = \vec{v}dt$ , se avviene realmente con velocità  $\vec{v} = \frac{dP}{dt}$
- **virtuale**, e si denota con  $\partial P$ , se è fittizio, non avviene realmente, ma immaginiamo che avvenga in un tempo  $\partial t = 0$  con velocità infinita.

Vale la pena ricordare la nozione di **spostamento totalmente proibito** che serve per introdurre i vincoli lisci che definiremo successivamente.

**Definizione 1.2.** Uno spostamento si definisce **totalmente proibito** quando porterebbe  $P$  da una configurazione  $P_0$  ad un'altra  $P_1$  alla quale non ci si può avvicinare in nessun modo, a causa dei vincoli.

Per completare la descrizione di un sistema meccanico è bene considerare i diversi tipi di forze che agiscono su di esso.

**Definizione 1.3 (Forza).** Si definisce **forza** un ente fisico in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo; cioè di produrre una variazione della velocità dei punti e quindi una accelerazione.

Dal punto di vista matematico una forza è un vettore applicato e cioè una coppia del tipo:

$$(\vec{F}, P) = (F_x, F_y, F_z, x, y, z),$$

dove  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  e  $P - O = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ .

$\vec{F}$  è il vettore della forza e  $P$  il suo punto di applicazione. In generale il vettore  $\vec{F}$  dipende dalla posizione e dalla velocità di  $P$  e dal tempo:

$$\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}(P), t).$$

Se  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  dipende solo dalla posizione di  $P$ , la forza si dice **posizionale**.

Il seguente postulato caratterizza l'azione dei vincoli:

**Postulato delle reazioni vincolari.** È sempre possibile rendere libero un qualunque sistema vincolato a patto di introdurre un opportuno sistema di forze dette **reazioni vincolari**.

Possiamo dunque distinguere le forze su due tipi principali:

1. **Reazioni vincolari:** dovuta all'azione dei vincoli;
2. **Forze attive:** tutte le altre (non dovute all'azione di vincoli)

**Definizione 1.4 (Vincolo liscio).** *Un vincolo si dice liscio o privo di attrito se è in grado di esercitare sul sistema meccanico su cui agisce l'azione di una sola reazione vincolare avente stessa direzione e verso opposto di uno spostamento totalmente proibito.*

Un esempio importante di forza attiva è la forza peso:

**Definizione 1.5.** *Dato un punto  $P$  di massa  $m$ , rispetto a un sistema di riferimento solidale con la rotazione terrestre, diciamo che agisce su  $P$  una **forza peso** di vettore:*

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

dove  $\vec{g}$  è detta accelerazione di gravità.

Introduciamo ora la nozione di **lavoro**.

**Definizione 1.6 (Lavoro elementare reale).** *Si definisce **lavoro elementare reale** di una forza  $(\vec{F}, P)$ , corrispondente allo spostamento reale  $dP$  di  $P$  il seguente prodotto scalare:*

$$dL = \vec{F} \cdot dP.$$

in termini di coordinate cartesiane si ha

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

.

Se consideriamo un sistema di  $N$  forze  $(\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$ , il lavoro elementare reale del sistema è dato dalla somma dei lavori delle singole forze:

$$dL = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot dP_s.$$

Vale la pena osservare che se  $(\vec{F}, P)$  è una forza posizionale si ha:

$$dL = F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$$

è una **forma differenziale in  $\mathbb{R}^3$** .

**Definizione 1.7.** *Una forza posizionale  $(\vec{F}, P)$ , si dice **conservativa** se il lavoro elementare  $dL$  è un differenziale esatto, cioè se esiste una funzione  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che  $dL = dU$ , essendo  $dU$  il differenziale di  $U$ . La funzione  $U$  è detta **potenziale** della forza.*

Segue immediatamente dalla definizione che  $(\vec{F}, P)$  è conservativa se e soltanto se

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

*Esempio 1.8.* La forza peso è una forza conservativa e si ha:  $U = -mgy(+c)$

Nel seguito supponiamo che il vettore di una forza sia di classe  $C^\infty$  rispetto alle variabili da cui dipende.

Utilizzeremo spesso le forze posizionali, quindi è bene ricordare che:

**Proposizione 1.9.** *Nel caso unidimensionale le forze posizionali sono sempre conservative.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che il moto del punto sia unidimensionale, che avvenga cioè lungo una retta che identifichiamo con l'asse  $x$ . Se  $(\vec{F}, P)$  è posizionale si ha

$$\vec{F} = F(x)\vec{i}$$

e il lavoro elementare risulta

$$dL = F(x)dx.$$

Prendendo  $U(x) = \int F(x) dx$  si ha ovviamente

$$dU = U'(x)dx = F(x)dx = dL$$

e ciò completa la dimostrazione.  $\square$

Alla base della dinamica di un punto materiale abbiamo la **seconda legge di Newton**:

**Legge fondamentale della dinamica.** *Se rispetto ad un osservatore  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  su un punto  $P$  di massa  $m$  agisce una forza di vettore  $\vec{F}$  allora l'accelerazione  $\vec{a}$  di  $P$  è data da:*

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Più in generale, se su  $P$  agisce il sistema di forze  $(\vec{F}_1, P), (\vec{F}_2, P), \dots, (\vec{F}_N, P)$  si ha

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

dove  $\vec{R}$  è il vettore risultante delle forze agenti sul sistema ovvero:

$$\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s.$$

**Definizione 1.10 (Energia cinetica).** *Si definisce **energia cinetica** di un punto  $P$  la grandezza scalare*

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

*essendo  $v = |\vec{v}|$  il modulo della velocità  $\vec{v}$  di  $P$ , e  $m$  la massa di  $P$ , l'energia cinetica è sempre positiva.*

Per un punto soggetto a vincoli lisci e fissi si ha

$$dL = dT,$$

dove  $dL$  è il lavoro elementare del sistema di forze attive agenti sul punto.

Nel caso di forze conservative, introdotta l'energia potenziale,  $V = -U$ , si ha come corollario il seguente

**Teorema 1.11 (Teorema di conservazione dell'energia).** *L'energia meccanica totale del punto  $T + V$  è una costante in  $t$ , cioè è un integrale primo del moto.*

*Dimostrazione.* dalla (1.1) e dalla 1.7 si ha

$$dT = dU = -dV,$$

ovvero

$$d(T + V) = 0$$

da cui

$$T + V = \text{cost}$$

□

Indicando con  $E$  l'energia meccanica totale, cioè  $E = T + V$ , questa può essere calcolata a partire dal dato iniziale  $P(t_0) = P_0$ ,  $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ :

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(P_0).$$

Nel caso unidimensionale il teorema di conservazione dell'energia meccanica totale equivale alla seconda legge di Newton.

**Definizione 1.12.** *Data una forza  $(\vec{F}, P)$  e un polo  $O \in \mathbb{R}^3$  si definisce **momento della forza rispetto ad  $O$**  il vettore*

$$\vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - P)$$

**Definizione 1.13.** *Si definisce **momento angolare o momento della quantità di moto** rispetto ad un polo  $O$  di un sistema di  $N$  punti  $P_1, P_2, \dots, P_N$  di masse  $m_1, m_2, \dots, m_N$  e velocità  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_N$  il vettore*

$$\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s)$$

**Definizione 1.14.** *Si definisce **momento di inerzia** rispetto ad una retta  $r$  per un corpo costituito da  $N$  punti  $P_1, P_2 \dots P_N$  la quantità*

$$I = \sum_{s=1}^N m_s r_s^2$$

dove  $r_s$  è la distanza di  $P_s$  dalla retta  $r$  e  $m_s$  è la massa di  $P_s$ ,  $\forall s = 1, \dots, N$ .

*Osservazione 1.15.* Il momento angolare, in caso di moto circolare uniforme o di un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso, può essere espresso nella sua forma scalare come

$$K = I\omega$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare il cui modulo è definito dalla derivata rispetto al tempo dell'angolo spazzato da un vettore che ruota solidale con il corpo.

Per le applicazioni successive è utile ricordare il seguente

**Teorema 1.16 (Legge di conservazione del momento angolare).** *Il momento angolare  $\vec{K}$  rispetto a un polo  $O$  è costante nel tempo se è nullo il momento delle forze esterne rispetto ad  $O$ .*

Concludiamo questo capitolo ricordando la definizione di configurazione di equilibrio per un punto materiale  $P$ .

**Definizione 1.17.** *Una configurazione  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  si dice di **equilibrio** per un punto  $P$ , se posto  $P$  in  $P_0$  ad un istante  $t_0$  con velocità nulla, rimane in  $P_0$  ad ogni istante successivo.*

*Osservazione 1.18.* In termini di soluzioni della equazione differenziale del secondo ordine:

$$m \frac{d^2 P(t)}{dt^2} = \vec{R} \left( t, P(t), \frac{dP(t)}{dt} \right)$$

che rappresenta la legge di Newton,  $P_0$  è configurazione di equilibrio se e solo se l'unica soluzione di (1.18) che ha seguito al dato iniziale

$$\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \vec{v}(t_0) = 0 \end{cases}$$

è la soluzione costante  $P(t) = P_0, \forall t \geq t_0$ .

Se le forze attive agenti su  $P$  sono conservative e i vincoli sono bilaterali si può dimostrare, a partire dal principio dei lavori virtuali per le forze attive, il seguente risultato (si veda D.Graffi [2] per dettagli e approfondimenti).

**Teorema 1.19.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $P_0$  sia una configurazione di equilibrio è che sia*

$$\nabla U(P_0) = 0,$$

dove  $U = U(P) = U(x, y, z)$  è il potenziale del sistema delle forze attive agenti su  $P$ .

## Capitolo 2

# Analisi qualitativa del moto unidimensionale: discussione alla Weierstrass

Studiare il moto di un sistema meccanico significa risolvere equazioni differenziali spesso non lineari. In questi casi è molto utile condurre un'analisi qualitativa invece di procedere con metodi di integrazione numerica.

In questo capitolo analizzeremo un metodo qualitativo chiamato **discussione qualitativa alla Weierstrass** che si applica al moto unidimensionale di un punto.

Per capire meglio l'argomento inizieremo illustrando il **Problema della dinamica del pendolo** che è l'esempio forse più tipico di un moto oscillatorio non lineare.

### 2.1 Dinamica del pendolo ideale

**Definizione 2.1 (Pendolo ideale).** *Si definisce **pendolo ideale** un sistema meccanico costituito da un punto materiale vincolato a percorrere una circonferenza in un piano verticale soggetto al solo peso.*

Per prima cosa ricordiamo la rappresentazione intrinseca della velocità e della accelerazione.

Assegnata una curva  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^3$  regolare, fissiamo su di essa un'origine  $O_1$  e un verso positivo definito **verso degli archi crescenti**. La posizione di un punto  $P$  sulla curva è univocamente determinata dalla coordinata curvilinea  $s \in \mathbb{R}$ , tale che  $|s|$  rappresenta la lunghezza dell'arco  $\widehat{O_1P}$ ; inoltre  $s > 0$  se  $P$  segue  $O_1$  nel verso positivo,  $s < 0$  se lo precede.

In questo modo la corrispondenza

$$s \longmapsto P(s)$$

consente di riguardare  $P$  come funzione della variabile  $s$ .

Si ha il seguente risultato:

$$\frac{dP(s)}{ds} = \vec{t}$$

dove  $\vec{t}$  è il versore tangente alla curva  $\gamma$  in  $P(s)$ , diretto nel verso degli archi crescenti. Inoltre

$$\frac{d^2P(s)}{ds^2} = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho_c} \vec{n}$$

dove  $\vec{n}$  è il versore della normale principale alla curva in  $P(s)$ , diretto verso il centro del cerchio osculatore e  $\rho_c$  è il raggio di curvatura di  $\gamma$  in  $P(s)$ .

Se  $\gamma$  rappresenta la traiettoria percorsa da un punto  $P$  durante il moto, per la velocità  $\vec{v}$  e l'accelerazione  $\vec{a}$  di  $P$  si ha la seguente rappresentazione:

$$\vec{v}(P) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{dP(s(t))}{dt} = \dot{s}\vec{t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{a}(P) = \frac{dP^2(t)}{dt^2} = \frac{d(\dot{s}\vec{t})}{dt} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_c}\vec{n}, \quad (2.2)$$

dove  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$  e  $\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$ .

Ritorniamo al caso del **pendolo ideale**.

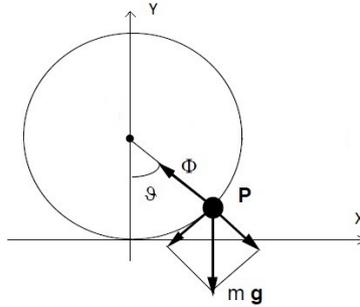


Figura 2.1: Pendolo semplice

Per conoscerne il moto occorre determinare la legge oraria  $s = s(t)$ . A tal fine ricordiamo la **legge fondamentale della dinamica**

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi},$$

dove  $\vec{F}$  è il vettore risultante delle forze attive e  $\vec{\Phi}$  quello delle reazioni vincolari. La  $\vec{\Phi}$  è incognita, ma nelle ipotesi di **vincolo liscio** (1.4), dato che l'unico spostamento totalmente proibito è quello normale alla curva verso l'esterno del cerchio,  $\Phi$  sarà diretta come in Figura 2.1.

Ora consideriamo l'espressione generale per l'accelerazione in forma intrinseca e proiettiamo la legge fondamentale della dinamica su  $\vec{t}$  e  $\vec{n}$ :

$$m\dot{s} = F_t$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho_c} = F_n + \Phi_n$$

Chiamiamo  $l$  il raggio della circonferenza e osserviamo che l'unico **parametro lagrangiano** è  $q = \theta$  che in radianti è  $\theta = \frac{s}{l}$ , di conseguenza si ha:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$ml\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + \Phi_n,$$

da cui  $\Phi_n = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$  e il moto è determinato dalla **equazione differenziale** di secondo ordine **non lineare**:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (2.3)$$

Soltanto quando l'ampiezza delle oscillazioni è sufficientemente piccola è possibile approssimare

$$\sin \theta \approx \theta.$$

In tal caso si ottiene una equazione differenziale del tipo

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

la cui soluzione generale è data da:

$$\theta(t) = C \cos(\omega t + \gamma) \quad C, \gamma \in \mathbb{R}$$

e rappresenta un moto oscillatorio armonico.

Pertanto le piccole oscillazioni sono armoniche e il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.4)$$

Si dimostra così la **legge di isocronismo del pendolo** osservata da **Galileo** nel 1581.

**Proposizione 2.2 (legge di isocronismo del pendolo).** *Il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo risulta direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza, inversamente proporzionale alla radice quadrata della accelerazione di gravità e indipendente dall'ampiezza.*

Se per piccole oscillazione si può trovare una soluzione analitica, benchè approssimata, l'integrazione generale di (2.3) è molto complessa e richiede la risoluzione di un integrale ellittico che è possibile solo con l'uso di particolari trascendenti dette funzioni ellittiche. In questi casi si fa uso di metodi alternativi come la **discussione qualitativa alla Weierstrass**.

## 2.2 Discussione qualitativa alla Weierstrass

Consideriamo il moto rettilineo di un punto  $P$  e supponiamo la forza agente **posizionale**, oltre che parallela, come la velocità iniziale, all'asse  $x$ . Come abbiamo visto in questo caso la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E, \quad (2.5)$$

è equivalente alla legge di Newton

$$m \ddot{x} = R(x). \quad (2.6)$$

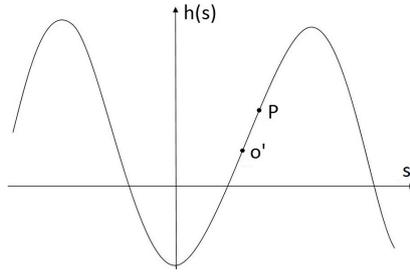
Quindi possiamo sfruttare la (2.5) per analizzare il moto di  $P$ .

Per prima cosa è bene notare che la quantità  $E - V(x)$  deve essere sempre positiva, altrimenti la velocità  $\dot{x}$  avrebbe un valore immaginario, cosa che comporta l'esclusione di tali configurazioni per il punto. Infatti il valore della velocità scalare è dato da:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} = \pm \sqrt{f(x)} \quad (2.7)$$

dove il segno della radice dipende dai dati iniziali:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = v_0 \end{cases}$$

Figura 2.2: Potenziale diviso  $mg$ 

Cerchiamo ora di comprendere per via **intuitiva** la natura del moto. Si abbia un punto materiale di massa  $m$  mobile in un piano verticale su terreno ondulato senza attrito soggetto solo al proprio peso. Sia  $s$  l'ascissa curvilinea misurata a partire da un'origine prefissata  $O'$  avendo fissato un verso positivo, e sia  $h(s)$  l'altezza dal suolo nel generico punto  $P$  di ascissa  $s$ . L'energia potenziale in  $P$  è  $mgh(s)$  e per il **teorema di conservazione dell'energia** si ha

$$\frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + mgh(s) = E$$

da cui si ottiene:

$$f(s) = \frac{2[E - mgh(s)]}{m}$$

che equivale alla precedente (2.7) con la sola sostituzione di  $x$  con  $s$ , perciò il moto rappresentato da

$$\dot{x} = \pm \sqrt{f(x)}$$

sarà identico a quello di un punto pesante su un terreno ondulatorio. Supponendo quindi che inizialmente il punto materiale si trovi in una posizione  $P_0$  fra due massimi di  $h(s)$ , si capisce che se l'energia totale  $E$  è abbastanza grande il punto riesce a superare uno dei due massimi e a muoversi sempre nello stesso verso. Se non è sufficiente, il punto sale fino a una certa altezza dove si annulla la velocità, poi discende, per risalire da parte opposta fino alla stessa altezza, dalla quale ridiscende così da compiere un moto periodico. In qualche altro caso più raro il corpo può giungere alla massima altezza in un tempo infinito.

Dimostriamo ora rigorosamente quanto si è trovato per via intuitiva. Abbiamo già determinato il dominio  $D_E = [x \in \mathbb{R} : E - V(x) \neq 0]$  in cui si può muovere il punto materiale. Distinguiamo ora due casi:

1.  $\dot{x}(t_0) \neq 0$
2.  $\dot{x}(t_0) = 0$

Analizziamo innanzitutto il primo caso:  $\dot{x}(t_0) \neq 0$ .

Fissando opportunamente il verso positivo dell'asse  $x$  possiamo assumere  $\dot{x}(t_0) > 0$  da cui, per continuità  $\exists \bar{t}$  tale che  $\dot{x}(t) > 0, \forall t \in [t_0, \bar{t}]$ . Allora ci riduciamo a studiare il caso di **moto diretto**, senza perdere di generalità.

Distinguiamo due casi:

- a)  $f(x) \neq 0 \forall x \geq x_0$
- b)  $\exists \bar{x} > x_0$  tale che  $f(\bar{x}) = 0$

che analizziamo qualitativamente.

a) Dalla (2.7) segue che  $\dot{x}(t) > 0 \forall t > t_0$ . Separando le variabili nella (2.7) si ottiene

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = dt. \quad (2.8)$$

Sia  $x > x_0$  una qualunque posizione fissata a destra di  $x_0$ ; vogliamo determinare il tempo  $t = t(x)$  che il punto impiega a raggiungere tale postazione. Integrando la (2.8) da  $x_0$  a  $x$  si ottiene

$$\int_{x_0}^x \frac{d\bar{x}}{\sqrt{f(\bar{x})}} = \int_{t_0}^t d\bar{t}.$$

Otteniamo così al primo membro un integrale convergente e pertanto si ha che:

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\bar{x}}{\sqrt{f(\bar{x})}} + t_0.$$

Quindi il punto impiega un **tempo finito** per raggiungere ogni  $x$  tale che  $x > x_0$ . In questo caso il moto si definisce **aperiodico verso**  $+\infty$  (considerando sempre la convenzione  $\dot{x}_0 > 0$ , in caso contrario si muoverebbe verso  $-\infty$ ).

b) Definiamo:

$$x_1 = \min \{x > x_0 : t.c. f(x) = 0\}$$

e osserviamo che nell'intervallo  $[x_0, x_1[$   $f(x)$  non si annulla mai, quindi ricadiamo nel caso precedente in cui tutti i punti precedenti  $x_1$ , vengono raggiunti.

Vogliamo ora capire se il punto materiale arriva in  $x_1$  e in che modo.

Per prima cosa è bene notare che  $x_1$  può essere **radice multipla o semplice**.

Introduciamo quindi la nozione di **molteplicità** di una radice. In particolare si dice che  $x_1$  è una radice di  $f(x) = 0$  di molteplicità  $m \in \mathbb{N}$  se si ha

$$f(x_1) = f'(x_1) = f''(x_1) = \dots = f^{m-1}(x_1) = 0$$

e

$$f^m(x_1) \neq 0,$$

cioè la prima derivata non nulla in  $x_1$  è quella di ordine  $m$ . Si parla di **radice semplice** se  $m = 1$ , in caso contrario ( $m \geq 2$ ) si parla di **radice multipla**. È immediato verificare che  $x_0$  è una radice multipla se e solo se  $f'(x_0) = 0$ .

Ricordando che  $f(x) = \frac{2}{m}(E - V(x))$ , si ha che  $x_1$  è radice multipla se e solo se  $V'(x_1) = 0$ , cioè  $x_1$  è una configurazione di equilibrio.

In generale, utilizzando la formula di Taylor, se  $x_1$  ha molteplicità  $m$  si può scrivere:

$$f(x) = (x - x_1)^m f_1(x), \quad \text{con } f_1(x_1) \neq 0.$$

Analizziamo allora separatamente le due possibilità :  $m = 1$  e  $m > 1$ .

Se  $x_1$  è **radice multipla**, ovvero si può scrivere:

$$f(x) = (x - x_1)^m f_1(x) \quad \text{con } f_1(x) \neq 0 \quad \text{e } m \geq 2,$$

separando le variabili nella (2.7) si ha

$$dt = \frac{dx}{|x - x_1|^{\frac{m}{2}} \sqrt{|f_1(x)|}} \quad (2.9)$$

Integrando la (2.9) da  $x_0$  a  $x_1$ :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{|x - x_1|^{\frac{m}{2}} \sqrt{|f_1(x)|}} = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0, \quad (2.10)$$

dove  $t_1 = t(x_1)$  è il tempo che il punto impiega a raggiungere  $x_1$ .

L'integrale al primo membro di (2.10) è un integrale in senso generalizzato il cui ordine di convergenza è determinato da

$$\frac{1}{|x - x_1|^{\frac{m}{2}}}$$

che è un infinito almeno del primo ordine e quindi non converge.

Si ha quindi che  $t_1 = \infty$  e il moto si definisce **asintotico verso la radice multipla**  $x_1$ , che non viene mai raggiunta, se non in un tempo infinito.

Se  $x_1$  è **radice semplice**, ovvero si può scrivere:

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x) \quad \text{con} \quad f_1(x) \neq 0, \quad (2.11)$$

separando nuovamente le variabili in (2.7) e integrando da  $x_0$  a  $x_1$  si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)f_1(x)}} = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0.$$

Al primo membro abbiamo un integrale convergente essendo la funzione integranda un infinito di ordine  $\frac{1}{2}$  per  $x \rightarrow x_1$ . Pertanto:

$$t_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)f_1(x)}} + t_0.$$

e il mobile raggiunge  $x_1$  in un tempo finito. Non resta che studiare la natura del moto dopo  $t_1$ . Analizziamo allora l'**accelerazione**:

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\sqrt{f(x)}}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x) \dot{x} = \frac{1}{2} f'(x). \quad (2.12)$$

Dalla (2.11) si ha

$$f'(x) = f_1(x) + (x - x_1)f_1'(x),$$

pertanto calcolando in  $t_1$  con  $x(t_1) = x_1$  si ottiene:

$$\ddot{x}(t_1) = \frac{1}{2} f'(x_1) = \frac{1}{2} f_1(x_1) \neq 0$$

essendo  $f_1(x_1) \neq 0$ . Inoltre essendo  $f(x)$  una funzione positiva per (2.7), da  $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$  si ottiene che

$$f_1(x) < 0, \quad \forall x < x_1$$

e quindi, per continuità,  $f_1(x_1) < 0$ , da cui

$$\ddot{x}(t_1) < 0.$$

Ne segue che la funzione  $\dot{x}(t)$  è decrescente in  $t_1$  e per continuità anche in tutto un intorno di  $t_1$ . Pertanto in  $t_1$  il punto inverte il moto e per  $t > t_1$ , in un intorno di  $t_1$ , il punto si muove di **moto retrogrado**. A questo punto si presentano tre possibilità:

- i) se  $f(x) \neq 0 \forall x < x_1$  con ragionamento analogo a quello svolto in a) si trova che il punto raggiunge in un tempo finito ogni postazione  $x < x_1$ . Si ha quindi un **moto aperiodico verso**  $-\infty$ .
- ii) se  $\exists x_2$  tale che  $f(x_2) = 0$  con  $x_2$  **radice multipla** e  $f(x) \neq 0 \forall x \in ]x_2, x_1[$ , il moto è **asintotico verso**  $x_2$  (il punto impiega un tempo infinito a raggiungere  $x_2$ ).
- iii) se  $\exists x_2$  tale che  $f(x_2) = 0$  con  $x_2$  **radice semplice** e  $f(x) \neq 0 \forall x \in ]x_2, x_1[$ , il mobile raggiungerà  $x_2$  in un tempo finito con velocità nulla e accelerazione positiva. Pertanto una volta giunto in  $x_2$  il punto **inverte** il suo moto ripassando all'istante  $T$  per il punto  $x_0$  con la stessa velocità iniziale e a partire da  $T$  il moto si riproduce nella maniera identica a quella descritta. In questo caso il moto risulta **periodico di periodo  $T$  tra  $x_1$  e  $x_2$** .

Il periodo, ovvero il tempo per compiere il ciclo, è dato dalla somma del tempo impiegato ad andare da  $x_1$  a  $x_2$  (con velocità negativa) e del tempo impiegato a tornare da  $x_2$  a  $x_1$  (con velocità positiva):

$$T = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = 2 \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}. \quad (2.13)$$

Rimane da analizzare il caso  $\dot{x}(t_0) = 0$ .

In questo caso si ha  $f(x_0) = 0$ , cioè  $x_0$  è uno zero di  $f(x)$ . Se è una radice multipla per quanto osservato prima si ha che  $x_0$  è una configurazione di equilibrio. Allora il dato iniziale  $x(t_0) = x_0$  e  $\dot{x}(t_0) = 0$  (il punto si trova all'istante iniziale in  $x_0$  con velocità nulla) implica che il punto resterà in  $x_0$  ad ogni istante successivo:

$$x(t) = x_0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Se invece  $x_0$  è radice semplice, con ragionamento analogo a quanto visto sopra si trova che  $\ddot{x}(t_0) \neq 0$ ; pertanto, a seconda del segno di  $\ddot{x}(t_0)$ , la velocità  $\dot{x}(t_0)$  risulterà strettamente monotona in un intorno di  $t_0$ . In particolare si avrà  $\dot{x}(t_0) \neq 0, \forall t > t_0$  in un intorno destro  $I(t_0)$  di  $t_0$ . Prendendo un generico istante  $\bar{t} \in I(t_0)$  come nuovo istante iniziale, da questo momento in poi la discussione si ripropone identica a quanto esaminato nel caso precedente  $\dot{x}(t_0) \neq 0$ . Più precisamente si potranno avere tre tipologie di moto: aperiodico (verso  $+\infty$  o  $-\infty$ ), asintotico verso una radice multipla di  $f(x) = 0$ , periodico fra due radici semplici di  $f(x) = 0$ .

Per quanto fino ad ora analizzato le radici semplici di  $f(x) = 0$  si chiamano **punti di inversione del moto**.

## 2.3 Applicazione dell'analisi alla Weierstrass al pendolo semplice

Per esaminare il moto del pendolo quando le oscillazioni non si possono ritenere piccole, effettuiamo uno studio qualitativo alla **Weierstrass**.

Riferendoci alla Figura 2.1 e supponendo il raggio della circonferenza lungo  $l$ , l'altezza di  $P$ , rispetto ad un piano orizzontale  $(O, x, y)$  è data da:

$$h = y = l - l \cos \theta$$

e pertanto l'energia potenziale  $mgh$  associata alla forza peso, che è l'unica forza attiva agente, è:

$$V = mg(l - l \cos \theta).$$

Ora ricordando che

$$\theta = \frac{s}{l} \quad e \quad \text{quindi} \quad \dot{s} = \dot{\theta}l,$$

il Teorema di conservazione dell'energia meccanica diventa

$$\frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = E. \quad (2.14)$$

Ora dividendo per  $ml$  e ricordando che:

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

da (2.14) si ottiene:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} - 4\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{g}{l},$$

che può essere riscritta come:

$$\left( \frac{d\frac{\theta}{2}}{dt} \right)^2 = \omega^2 \left( \frac{E}{2mgl} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = f \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.15)$$

Questa equazione è sostanzialmente identica alla (2.7), con la differenza che la variabile  $x$  è sostituita con  $\frac{\theta}{2}$ . Per svolgere una analisi qualitativa della (2.15) distinguiamo ora tre casi:

1.  $\frac{E}{2mgl} > 1$

In questo caso il secondo membro della (2.15) non si annulla mai. Allora, per i risultati ottenuti nel paragrafo precedente, si ha che  $\dot{\theta} \neq 0, \forall t \geq t_0$ , cioè la velocità angolare non si annulla mai, pertanto mantiene segno costante e  $\theta(t)$  varia sempre nello stesso verso. Dunque il punto continua a ruotare lungo la circonferenza, sempre secondo lo stesso verso, senza fermarsi mai. Il moto si dice **rivolutivo**.

In altre parole l'energia è così grande che il pendolo riesce a superare, durante il moto, la sua posizione di massima altezza.

2.  $\frac{E}{2mgl} = 1$

In questo caso la (2.15) si annulla per

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 \quad \text{ovvero} \quad \theta = \pi.$$

Ma è facile verificare che in questo caso abbiamo una **radice doppia**. Infatti derivando il secondo membro di (2.15) si ottiene:

$$f'(\theta) = -\omega^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

che si annulla per  $\theta = \pi$ . Quindi per quanto visto nella sezione precedente, si ha un **moto asintotico verso**  $\pi$ .

Il pendolo, al crescere indefinito del tempo, tende, senza mai raggiungerla, alla massima altezza concessa dai vincoli.

3.  $\frac{E}{2mgl} < 1$

In questo caso possiamo porre  $\frac{E}{2mgl} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ . In questo modo la (2.15) ammette due **radici semplici**:

$$\frac{\theta}{2} = \pm \frac{\alpha}{2}.$$

Come è noto, dalla discussione precedente, il questo caso  $\theta$  oscilla tra questi due limiti, cioè il moto del pendolo è **oscillatorio** e  $\alpha$  è la sua ampiezza.

Calcoliamo ora il **periodo** del pendolo in quest'ultimo caso.

Per la (2.13) si ha:

$$T = \frac{2}{\omega} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (2.16)$$

Ora poniamo  $\sin \frac{\alpha}{2} = k$  e  $\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \psi$ , ottenendo quindi  $\frac{\theta}{2} = \arcsin(k \sin \psi)$ ,  $d\frac{\theta}{2} = \frac{k \cos \psi d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$ . Ora sostituendo nella (2.16) troviamo:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Questo è un **integrale ellittico** che si può calcolare sviluppando il radicale in serie. Se  $k$  è abbastanza piccolo da poter trascurare le potenze superiori alla seconda si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = (1-k^2 \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \psi$$

e ricordando che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\psi}{2} d\psi = \frac{\pi}{2},$$

si ottiene subito:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2 \psi \right] d\psi = \pi \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right).$$

In generale si ha:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \dots \right)$$

Si può osservare che il periodo del pendolo **non dipende dall'ampiezza**, solo quando le ampiezze delle oscillazioni sono piccolissime, così da poter trascurare  $k^2$  e potenze superiori. Si ritrova in questi casi la **legge di isocronismo del pendolo** di Galileo. Se invece  $k = \sin \frac{\alpha}{2}$  è piccolo (ma non piccolissimo) in modo da poter trascurare  $k^4$  e potenze superiori; in serie  $k^2$ :

$$k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{48} + \dots$$

si può approssimare  $k^2 = \frac{\alpha^2}{4}$ , da cui:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right).$$

Da questa si ricava che per  $\alpha = 10^\circ$ :

$$T = (1,0019)2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dunque per ampiezze di questa dimensione il periodo aumenta del 0,19% rispetto al valore per ampiezze piccolissime. Quindi, in questi casi, si può approssimare bene il periodo con la **formula di Galileo**.

Si può inoltre notare che il periodo è sempre proporzionale alla radice quadrata della lunghezza e inversamente proporzionale alla radice quadrata della accelerazione di gravità.

## 2.4 Applicazione della discussione alla Weierstrass al pendolo sferico

Analizziamo ora il **moto del pendolo sferico**, cioè il moto di una pallina pesante mobile sulla superficie di una sfera di centro  $O$  e raggio, lunghezza del pendolo,  $l$  come in figura (2.3).

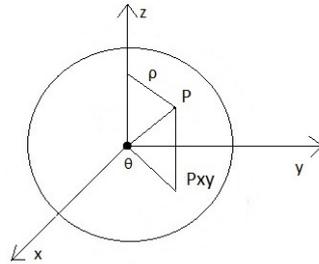


Figura 2.3: Pendolo sferico

Siamo ora nel caso di un sistema posizionale multidimensionale. È bene osservare che in questo caso è ancora possibile applicare la discussione qualitativa alla Weierstrass, però si dovranno sfruttare due integrali primi del moto, poiché i gradi di libertà, e quindi le incognite, nel caso di una superficie sono sempre due.

Nel caso multidimensionale di forze conservative infatti, come abbiamo ricordato nel primo capitolo, l'equazione di Newton induce sempre la conservazione dell'energia meccanica, ma ciò non basta a conoscere il moto che è determinato da due incognite.

Consideriamo un sistema di coordinate cilindriche  $\rho, \theta, z$ , con origine in  $O$  e asse  $z$  rivolto verso l'alto;  $\rho$  rappresenta la distanza del punto  $P$  dall'asse  $z$ ,  $\theta$  l'angolo che il vettore  $P_{xy}-O$  forma con l'asse  $x$  e  $z$  l'altezza ( $P_{xy}$  denota la proiezione di  $P$  sul piano  $xy$ ). Si ha dunque

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Poiché le forze attive sono conservative e ammettono potenziale  $-mgz$  vale il teorema di conservazione di energia, cioè:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E. \quad (2.17)$$

Ricordando che le componenti, radiale e trasversa, della velocità in coordinate polari  $(\rho, \theta)$  nella base  $(\vec{r}, \vec{h})$ , dove  $\vec{r}$  è il versore diretto come  $P - O$  e  $\vec{h}$  il versore ruotato di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto al precedente, sono date da:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\rho &= \dot{\rho}\vec{r} \\ \vec{v}_\theta &= \rho\dot{\theta}\vec{h}, \end{aligned}$$

si ha che la (2.17) equivale a:

$$\frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2] + mgz = E. \quad (2.18)$$

Inoltre la reazione vincolare  $\vec{\Phi}$ , sempre nell'ipotesi di vincoli lisci, si trova in direzione e verso opposto all'unico spostamento totalmente proibito, ovvero quello della normale alla superficie sferica. Quindi la linea d'azione di  $\vec{\Phi}$  incontra l'asse  $z$  e il peso  $\vec{P}$  è parallelo a quest'asse, pertanto il momento  $\Omega_z(O)$  della forza peso e della reazione vincolare applicato in  $O$  rispetto a  $z$  è nullo.

Quindi per quanto visto nel primo capitolo (Teorema 1.16) dato che il momento lungo  $z$  delle forze esterne è nullo, il momento della quantità di moto  $K_z(O)$  è costante con  $z$  asse fisso. Si ha quindi:

$$K = I\omega = c \quad \text{e quindi} \quad \rho^2\dot{\theta} = c, \quad (2.19)$$

essendo  $I = m\rho^2$  e  $m$  denota la massa del punto. Qui  $c$  è una costante che si determina con le condizioni iniziali. Abbiamo quindi **due integrali primi** del problema (2.18) e (2.19), ovvero due quantità che si mantengono costanti nel tempo.

Se inizialmente  $\dot{\theta} = 0$ , si ha che  $c = 0$ . Pertanto  $\dot{\theta} \equiv 0$  e quindi  $\theta$  vale sempre il suo valore iniziale  $\theta_0$  e il moto avviene nel piano verticale che forma un angolo  $\theta_0$  con un piano passante per l'asse  $z$  e l'asse polare. In questo caso il **pendolo sferico** si riduce al **pendolo semplice**. Infatti si può notare che in questo caso nella (2.18) manca il termine in  $\dot{\theta}$  e quindi si riduce a (2.14).

Se  $c \neq 0$  si ha dalla (2.19) che:

$$\dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}. \quad (2.20)$$

La  $\dot{\theta}$  avrà sempre stesso segno di  $c$  e non si potrà mai annullare, perciò  $\theta$ , sarà sempre crescente o decrescente.

Sostituendo la (2.20) nella (2.18) otteniamo:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} + \dot{z}^2\right) + mgz = E. \quad (2.21)$$

Per ridurci ad una equazione nella sola  $z$  osserviamo che, essendo il punto sulla sfera, si ha:

$$\rho^2 = l^2 - z^2,$$

e derivando otteniamo:

$$\rho\dot{\rho} = -z\dot{z}$$

e quindi:

$$\dot{\rho}^2 = \frac{z^2}{\rho^2}\dot{z}^2 = \frac{z^2}{l^2 - z^2}\dot{z}^2.$$

Sostituendo ora quanto ottenuto nella (2.21) si ha:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{z^2}{l^2 - z^2}\dot{z}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} + \dot{z}^2\right) + mgz = E \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{z^2}{l^2 - z^2} + 1\right)\dot{z}^2 + \frac{c^2}{l^2 - z^2} + 2gz = \frac{2E}{m}.$$

Ricavando  $\dot{z}^2$  si ottiene:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2E}{m} - 2gz\right) \left(\frac{l^2 - z^2}{l^2}\right) - \frac{c^2}{l^2} \quad (2.22)$$

che nelle notazioni solite diventa:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = f(z). \quad (2.23)$$

Indichiamo ora con  $z_0$  la posizione iniziale del punto e distinguiamo due casi:

1.  $f(z_0) \neq 0$ .

Per la (2.23) si ha che  $f(z_0) > 0$ . Si può osservare dalla (2.22) che  $f(l)$  e  $f(-l)$  valgono  $-\frac{c^2}{l^2}$  e quindi sono negative. Pertanto il polinomio di terzo grado  $f(z)$  ha sicuramente una radice:

$$z_1 \in ] -l, z_0[$$

e una seconda radice:

$$z_2 \in ]z_0, +l[.$$

Inoltre dalla (2.22) è facile osservare che:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) > 0,$$

quindi la terza radice sarà:

$$z_3 > +l$$

e perciò solo due radici cadono nell'intervallo  $] -l, l[$ . Allora, per quanto visto nella **discussione qualitativa alla Weierstrass**, si può affermare che  $z$  **oscillerà fra i valori**  $z_1$  e  $z_2$ , cioè il punto oscillerà tra i paralleli determinati dai piani  $z = z_1$  e  $z = z_2$ .

Il punto percorrerà quindi una curva sinuosa che tocca ora uno, ora l'altro dei due paralleli. Come è intuitivo  $z_1$  e  $z_2$  non possono essere entrambe positive, cioè il pendolo non può rimanere sempre ad una quota superiore a quella del punto di sospensione.

2.  $f(z_0) = 0$

Se  $z_0$  è **radice semplice**, il moto risulterà del tipo appena descritto;

Se  $z_0$  è **una radice doppia**,  $z$  rimane sempre uguale a  $z_0$  e il punto rimane sempre sul parallelo a  $z = z_0$ , muovendosi perciò di **moto circolare uniforme** su un cerchio di raggio  $\rho = \sqrt{l^2 - z_0^2}$ . Il moto è uniforme per la (2.20), poichè il punto descrive una traiettoria circolare mantenendo costante il modulo del vettore velocità.

Un esempio di **pendolo sferico** è il **pendolo di Foucault**, realizzato in modo che il suo piano di oscillazione sia libero di ruotare. Fu realizzato da Foucault nel 1851 nel Panthèon di Parigi per dimostrare la rotazione della Terra attorno al proprio asse (si veda M.Fabrizio [1] per maggiori dettagli).

## Capitolo 3

# Discussione qualitativa attraverso il diagramma di fase

In questo capitolo spiegheremo che cosa è e come costruire il diagramma di fase di un sistema meccanico a un grado di libertà e applicheremo questi risultati al caso del pendolo semplice e all'oscillatore armonico.

### 3.1 Diagramma di fase

Per discutere qualitativamente il moto di un sistema meccanico è molto utile costruire il relativo **diagramma di fase**.

Per spiegare il problema di cui ci occuperemo, assumiamo di partire da un sistema di equazioni differenziali di primo ordine di questo tipo:

$$\dot{u} = f(u, t),$$

L'insieme delle variabili  $u(t)$  corrispondenti ad una soluzione particolare del sistema, valutato in un istante di tempo, si dice **stato del sistema** nell'istante  $t$  e il sistema stesso si dice **sistema dinamico**.

Lo spazio in cui sono rappresentati gli stati  $u(t)$  di un sistema dinamico è definito **spazio delle fasi**.

La descrizione del moto mediante lo spazio delle fasi diventa particolarmente comoda quando il sistema meccanico ha un solo grado di libertà, perchè in questo caso lo spazio delle fasi diventa un piano, al quale si dà il nome di **piano delle fasi**, ed è possibile rappresentare su un foglio di carta gli stati del sistema meccanico e la loro evoluzione. Il vettore degli stati del sistema ha due sole componenti:  $u = (x, y)$ .

Ad esempio nel caso di un **punto materiale** lo spazio delle fasi corrisponde allo **spazio delle posizioni e delle velocità** e si ha:

$$\dot{u} = f(x, y, t)$$

con

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{m}F(x, y, t) \end{pmatrix}.$$

Nel caso di un sistema a più gradi di libertà, diciamo  $n$ , invece si fa uso delle equazioni di Hamilton, le quali sono già del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{cases} \quad h = 1, \dots, n$$

In questo caso si ha:

$$u = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \\ p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

e lo spazio delle fasi diventa lo spazio delle posizioni  $q = (q_1, \dots, q_n)$  e dei momenti  $p = (p_1, \dots, p_n)$ .

Nella nostra trattazione ci concentreremo sul caso del punto materiale, in cui lo spazio delle fasi diventa un piano.

Uno stato del sistema differenziale  $u$ , valutato in un certo istante, viene rappresentato da un punto sul piano delle fasi.

Assegnando delle condizioni iniziali  $u_0 = (x_0, y_0)$ , si individua il punto di partenza del moto. L'integrale particolare  $u(t)$  corrispondente è unico se la funzione  $f$  è **lipschitziana** ed è caratterizzato da:

$$\begin{cases} x(t) = x(t, x_0, y_0) \\ y(t) = y(t, x_0, y_0) \end{cases}$$

Geometricamente queste sono le equazioni parametriche di una curva del piano delle fasi alla quale si dà il nome di **traiettoria di fase**.

La traiettoria di fase ha un verso di percorrenza dato dall'evoluzione temporale del moto: se la derivata temporale di  $x$ , che è data da  $y$ , è positiva la funzione  $x$  cresce nel tempo; se  $y$  è negativa  $x$  decresce. Di conseguenza i rami delle traiettorie di fase che si trovano nel semipiano delle  $y > 0$  sono percorsi nel senso delle  $x$  crescenti, mentre quelli che si trovano nel semipiano delle  $y < 0$  sono percorsi nel senso delle  $x$  decrescenti. L'insieme delle traiettorie

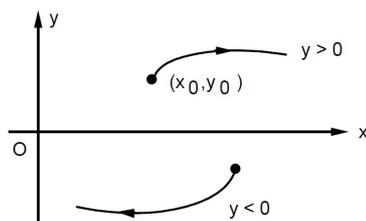


Figura 3.1: traiettorie di fase e loro orientamento

di fase che descrivono un sistema si dice **diagramma di fase** del sistema.

Quando lo si ritenga necessario è possibile dare anche una rappresentazione tridimensionale del moto introducendo l'asse dei tempi: si parla in questo caso di **spazio delle fasi ampliato**.

Diamo ora alcune definizioni importanti:

**Definizione 3.1.** Si definisce **velocità di fase** la derivata temporale del vettore  $u(x, y)$ :

$$v_f = \dot{u} = (\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x}, \ddot{x})$$

*Osservazione 3.2.* Questo vettore non va confuso con la velocità del moto nello spazio delle configurazioni, che costituisce solo la prima componente della velocità di fase. La seconda componente è data dalla accelerazione. La velocità di fase è un vettore che si mantiene tangente alle traiettorie di fase durante il moto.

**Definizione 3.3.** Si definiscono **punti fissi o di equilibrio** quei punti del sistema che hanno velocità di fase nulla: in questi punti la velocità e la accelerazione sono contemporaneamente nulle, per cui il sistema meccanico si trova in quiete; di qui la denominazione di **punti fissi**.

È interessante dare una definizione di **stabilità** dei punti di equilibrio:

**Definizione 3.4.** Un punto di equilibrio si definisce **stabile** se il lavoro finito compiuto dalle forze attive per passare da una configurazione  $q_0$  ad una qualunque altra vicina è sempre negativo.

Un punto di equilibrio si dice **instabile** se  $\forall$  intorno di  $q_0 \exists$  una configurazione  $q$  tale che il lavoro finito per passare da  $q_0$  a  $q$  è maggiore di zero.

Si può osservare che nel caso di forze conservative:

1. Se  $q_0$  è **punto di massimo per  $U(q)$  e quindi di minimo per  $V(q)$**  allora  $q_0$  è di equilibrio **stabile**,
2. Se  $q_0$  è **punto di minimo per  $U(q)$  e quindi di massimo per  $V(q)$**  allora  $q_0$  è di equilibrio **instabile**.

*Osservazione 3.5.* Essendo nulla la velocità i punti fissi appartengono sempre all'asse delle ascisse. Tuttavia non tutti i punti dell'asse delle ascisse sono punti fissi.

Dalla Definizione 3.3 segue che se  $u_0 = (x_0, y_0)$  è un punto fisso nel piano delle fasi, esso corrisponde ad una configurazione di equilibrio  $P_0 = (x_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  per il punto  $P$ .

Dunque i punti fissi sono le traiettorie di fase corrispondenti a quel particolare caso di moto che è la quiete.

Dal punto di vista dei problemi meccanici i sistemi di interesse sono quelli che derivano da una equazione differenziale del secondo ordine del tipo:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

nella cui struttura rientra l'equazione del moto di un punto.

Il sistema di equazioni al primo ordine associato è della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y). \end{cases}$$

In corrispondenza delle condizioni iniziali  $(x_0, y_0)$ , l'integrale particolare:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

fornisce le equazioni parametriche della traiettoria di fase, la cui equazione cartesiana è:

$$y = y(x),$$

e si ottiene eliminando il parametro  $t$ .

È molto interessante capire come l'analisi qualitativa del moto nel piano delle fasi riesca ad

ottenere informazioni sul moto, mediante le traiettorie di fase, anche quando non si riesce ad integrare il sistema differenziale del moto.

Cerchiamo ora di giungere ad una equazione differenziale per la funzione incognita  $y = y(x)$ , senza coinvolgere il tempo, e quindi senza conoscere la legge di evoluzione temporale del moto. Derivando rispetto al tempo  $y(x(t))$  si ottiene:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}y(x(t)) = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' \dot{x}.$$

Se si escludono i punti del piano delle fasi nei quali si annulla  $y = \dot{x}$  si giunge a:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

e ricordando che  $\dot{x} = y$  e  $\dot{y} = f(x, y)$  si ha:

$$y' = \frac{1}{y} f(x, y) \quad (3.1)$$

che viene chiamata **equazione delle curve integrali** e non dipende più da  $t$ . Le soluzioni di questa equazione possono essere delle curve a più rami che corrispondono a traiettorie di fase distinte.

Geometricamente  $y'$  rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva integrale nel punto del piano delle fasi di coordinate  $(x, y)$ .

Analizziamo ora il comportamento dei punti in cui  $y = \dot{x} = 0$ , questi punti sono singolari dal punto di vista geometrico, ma particolarmente significativi dal punto di vista del problema meccanico:

1. **Punti di equilibrio:**  $\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$

Sono i punti fissi, in cui oltre alla velocità si annulla anche l'accelerazione, cioè si annulla la velocità di fase. Pertanto risulta nulla anche la funzione  $f(x, 0)$  e nella (3.1) si ha una indeterminazione del tipo  $\frac{0}{0}$ . Geometricamente la tangente risulta indeterminata.

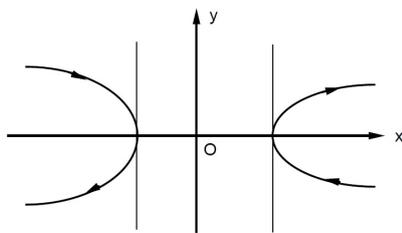


Figura 3.2: punti di inversione del moto

2. **Punti di inversione del moto:**  $\dot{x} = 0, \ddot{x} \neq 0$

questi punti si trovano sull'asse delle ascisse, ma non sono punti fissi. Pertanto  $f(x, 0) \neq 0$ , quindi l'equazione delle curve integrali ci dà l'informazione relativa al limite della derivata:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y' = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} f(x, 0) = \infty.$$

Geometricamente questo significa che la tangente alla curva integrale nel punto singolare, è verticale. La curva attraversa l'asse delle ascisse nel punto singolare e quindi la velocità cambia segno, invertendo il verso del moto e quindi la  $x(t)$  passa da funzione crescente a decrescente. Perciò la  $x(t)$  raggiunge per  $y = 0$  il suo massimo o il suo minimo, come in Figura 3.2.

### 3.2 Curve di livello dell'energia

Esaminiamo il caso di sistema autonomo ovvero tale che la funzione  $f$  non contenga la dipendenza esplicita dal tempo:

$$\dot{u} = f(u)$$

e conservativo, per un punto materiale.

In questo caso si può esprimere la (3.1) nella forma

$$y' = -\frac{1}{my} V'(x)$$

che equivale a

$$myy' = -V'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} my^2 + V(x) \right] = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{2} my^2 + V(x) = \text{costante}.$$

Essendo  $y = \dot{x}$  la velocità del punto, l'equazione precedente esprime l'integrale primo dell'energia meccanica.

Si ha quindi che in questo caso le curve integrali del moto di un punto soggetto a forza conservativa sono le curve di livello dell'energia meccanica, cioè le curve lungo le quali l'energia mantiene valore costante. A questo punto lo studio dell'andamento delle curve di livello si può condurre esplicitando  $y$ :

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (3.2)$$

dalla quale l'andamento delle curve di livello può essere dedotto dall'andamento dell'energia potenziale.

La condizione di realtà della radice quadrata

$$E - V(x) \geq 0 \quad (3.3)$$

fornisce le informazioni relative agli intervalli permessi per le posizioni  $x$  del punto.

Notiamo che il dominio può essere non connesso, con la conseguenza che possono esistere, in corrispondenza di un valore assegnato di energia, più rami o **traiettorie di fase**.

Il risultato che si ottiene è molto potente poichè ci consente di ottenere informazioni qualitative sull'andamento del moto, senza integrare le equazioni, ma calcolando solamente l'energia meccanica del sistema. Al variare di  $E$  si ottiene l'intera famiglia delle curve integrali del moto del punto.

Inoltre in questo caso, la discussione sulle singolarità delle curve integrali si ricollega alla discussione qualitativa alla Weierstrass, dove i punti fissi corrispondono alle radici multiple di  $f(x)$  e i punti di inversione del moto, alle radici semplici.

**Osservazione 3.6.** Due curve di livello relative a differenti valori dell'energia **non hanno punti in comune**. Infatti i punti d'intersezione di due curve di livello relative ad energie **distinte**  $E_1, E_2$  sono dati dalle soluzioni, se esistono di:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} my^2 + V(x) = E_1 \\ \frac{1}{2} my^2 + V(x) = E_2 \end{cases}$$

da cui otteniamo  $E_1 - E_2 = 0$  contrariamente all'ipotesi che le energie siano distinte. Dunque le due curve non si intersecano in alcun punto.

Procediamo ora con la costruzione del **diagramma di fase** per un sistema unidimensionale soggetto a forze conservative, distinguendo alcuni casi.

1. **V(x) monotona crescente (decescente)**

Iniziamo con l'analisi degli zeri di  $E - V(x)$ . Se  $V(x)$  è monotona crescente è possibile determinare, per ogni valore assegnato dell'energia meccanica  $E$ , una sola soluzione  $x_E$ :

$$x_E = V^{-1}(E)$$

grazie alla biunivocità della funzione nel dominio di monotonia. Il dominio di esistenza in questo caso sarà dato da:

$$x \leq x_E$$

Inoltre la soluzione  $x_E$  ha molteplicità  $m = 1$  poichè  $V'(x_E) \neq 0$  grazie alla monotonia. Di conseguenza l'accelerazione del moto è non nulla e il punto  $x_E$  è un punto di **inversione del moto**.

Se  $V(x)$  è decrescente il dominio sarà dato da:

$$x \geq x_E$$

e il grafico diventa simmetrico rispetto ad un asse verticale.

2. **V(x) dotata di massimo**

Quando  $V(x)$  è massima in un punto  $\bar{x}$  si ha un **punto di equilibrio instabile**. Indichiamo con  $\bar{V} = V(\bar{x})$  e distinguiamo tre casi:

a)  $E < \bar{V}$

In questo caso il dominio è dato da due intervalli disgiunti:

$$x \leq x_E^{(1)}, \quad x \geq x_E^{(2)}$$

In quanto la disequazione:

$$E - V(x) \geq 0$$

ammette due soluzioni del tipo esaminato nel caso precedente di energia potenziale monotona come si vede in Figura 3.3, si ha infatti che per  $x < \bar{x}$ ,  $V(x)$  è monotona crescente e decrescente per  $x > \bar{x}$ .

Pertanto i due punti  $x_E^{(1)}$ ,  $x_E^{(2)}$  sono due **radici semplici** e quindi due punti di **inversione del moto** e il moto non è permesso nell'intervallo compreso tra questi.

b)  $E > \bar{V}$

In questo caso:

$$E - V(x) \geq E - \bar{V} > 0$$

è sempre soddisfatta e tutto l'asse  $x$  può essere percorso dal moto.

La curva di livello relativa all'energia  $E$  possiede due rami, corrispondenti al segno positivo e negativo della (3.2), che non possono connettersi tra loro perchè non hanno intersezioni con l'asse delle ascisse in quanto non può mai verificarsi  $E - V(x) = 0$ .

Si ha invece, come si vede nella figura (3.4) una intersezione con la retta di equazione  $x = \bar{x}$  che per comodità possiamo identificare come asse  $y$ :

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - \bar{V})}$$

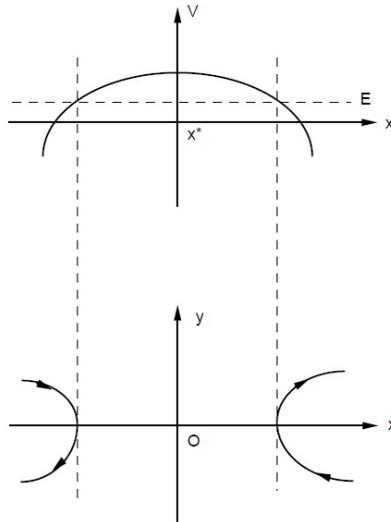


Figura 3.3: punti di inversione del moto nel caso di un massimo per l'energia potenziale

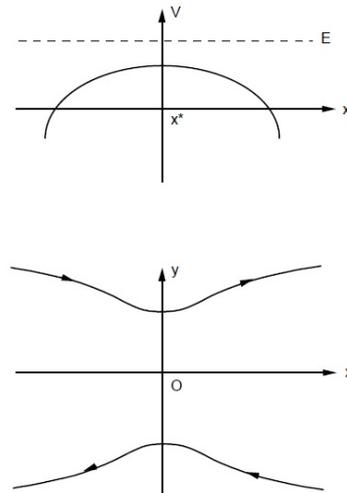


Figura 3.4: curve di livello con energia superiore al massimo dell'energia potenziale

c)  $E = \bar{V}$

Ci troviamo nel caso limite tra i due precedenti. La condizione di realtà della radice è sempre verificata poichè si ha:

$$V(x) \leq \bar{V} \quad \Rightarrow \quad E - V(x) = \bar{V} - V(x) \geq 0$$

La radice  $\bar{x}$  di

$$V(x) = E$$

ha **molteplicità**  $m = 2$  in quanto si verifica che la derivata prima di  $f(x)$  è nulla in  $\bar{x}$ :

$$f'(\bar{x}) = V'(\bar{x}) = 0,$$

poichè  $\bar{x}$  è un punto di massimo per  $V$ . La retta  $y = E$  e la curva dell'energia potenziale sono tangenti in  $\bar{x}$  e la curva di livello corrispondente ha equazione:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(\bar{V} - V(x))}.$$

I due rami corrispondenti ai due segni hanno in comune un punto di fase di coordinate  $(\bar{x}, 0)$ , ma questo è un **punto fisso** e quindi una **radice multipla** per  $f$  e pertanto, per quanto discusso nel capitolo precedente, non viene mai raggiunto, o meglio viene raggiunto in un tempo infinito. Inoltre se viene assegnato come condizione iniziale, corrisponde alla **traiettoria di fase di quiete** che è rappresentata da un solo punto. In questo caso i rami della curva di livello sono quindi quattro e prendono il nome di **curve separatrici**. Il moto è **asintotico** verso  $\bar{x}$  come rappresentato in figura (3.5).

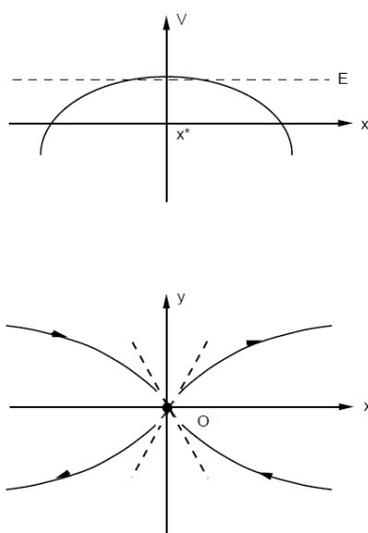


Figura 3.5: curve separatrici

Diremo che i punti di **equilibrio instabile** rappresentano dei **punti di sella** per l'energia meccanica del sistema, infatti considerando la funzione:

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + V(x)$$

in corrispondenza di un **massimo** di energia potenziale in  $\bar{x}$  e imponendo  $y = 0$  si ha:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x, y) = V'(x), \quad \frac{\partial E}{\partial y}(x, y) = my$$

e questo comporta:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y}(\bar{x}, 0) = 0$$

ed esaminando le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, y) = V''(x), \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x, y) = m$$

Da cui:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(\bar{x}, 0) = V''(\bar{x}) < 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(\bar{x}, 0) = 0 \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(\bar{x}, 0) = m > 0.$$

Essendo  $\bar{x}$  un massimo di energia potenziale, la derivata seconda in questo punto è negativa e inoltre  $m$  è sempre positiva pertanto la matrice Hessiana di  $E$  data da:

$$\begin{pmatrix} V''(\bar{x}) & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

è **indefinita**, cioè ha autovalori sia positivi che negativi e in questo caso il punto  $\bar{x}$  viene detto **punto di sella**.

Conglobando i risultati ottenuti a tutti gli intervalli dell'energia meccanica otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di **massimo** dell'energia potenziale in Figura 3.6.

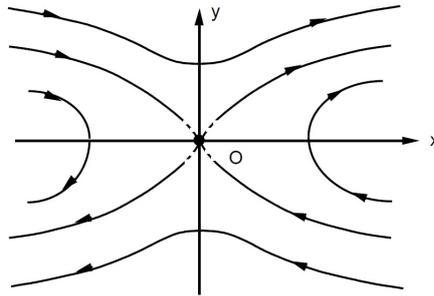


Figura 3.6: curve di livello nel caso di punto di sella instabile

### 3. $V(x)$ dotata di un minimo

Quando l'energia potenziale  $V(x)$  è **minima** in un punto  $\bar{x}$ , si ha un **punto di equilibrio stabile**, ovvero a potenziale massimo.

Indicando con  $\bar{V} = V(\bar{x})$  il valore minimo dell'energia potenziale, distinguiamo i tre seguenti casi.

a)  $E < \bar{V}$

In questo caso la condizione di realtà della radice non è **mai soddisfatta**, in quanto:

$$V(x) \geq \bar{V} \Rightarrow -V(x) \leq -\bar{V} \Rightarrow E - V(x) \leq E - \bar{V} < 0$$

E quindi la disequazione:

$$E - V(x) \geq 0,$$

**non** ammette soluzioni e non vi sono intersezioni tra la retta di equazione  $y = E$  e la curva dell'energia potenziale.

In questo intervallo di energia **il moto non è permesso**.

b)  $E > \bar{V}$

In questo caso la condizione di realtà della radice ammette sempre **due soluzioni distinte**:  $x_E^{(1)}$ ,  $x_E^{(2)}$ , corrispondenti alle due intersezioni della retta  $y = E$  con la curva dell'energia potenziale. Dato che  $V(x)$  è monotona crescente per  $x > \bar{x}$  e monotona decrescente per  $x < \bar{x}$ , il moto può avvenire solo nell'intervallo:

$$x_E^{(1)} \leq x \leq x_E^{(2)}$$

La curva di livello dell'energia  $E$  possiede due intersezioni con la retta  $x = \bar{x}$ , che per comodità possiamo identificare con l'asse delle  $y$ , corrispondenti alle ordinate:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - \bar{V})}$$

e quindi i due rami si intersecano in una **curva chiusa** come in Figura 3.7. Notiamo

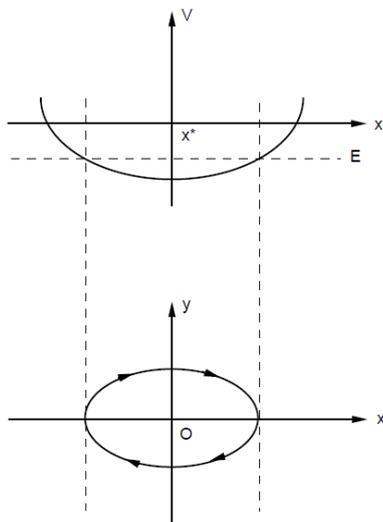


Figura 3.7: curve di livello con energia superiore al minimo di energia potenziale

che il fatto che la curva di livello sia chiusa implica che il moto sia **periodico**, perchè ripassa per gli stessi punti di fase, cioè nelle stesse posizioni e con la stessa velocità dopo uno stesso tempo, che rappresenta il periodo del moto secondo la (2.13).

Questo dipende dal fatto, come visto nella discussione qualitativa alla Weierstrass, che  $x_E^{(1)}, x_E^{(2)}$  sono **radici semplici**.

c)  $E = \bar{V}$

In questo caso la condizione di realtà della radice:

$$E - V(x) = \bar{V} - V(x) \geq 0$$

si unisce alla condizione di **minimo**:

$$\bar{V} - V(x) \leq 0$$

e quindi esiste ed è unica la radice  $\bar{x}$  dell'equazione:

$$V(x) = E$$

che ha molteplicità  $m = 2$  in quanto la retta  $y = E$  e la curva dell'energia potenziale sono tangenti in  $\bar{x}$  che è un punto di minimo.

Pertanto l'unico punto di fase permesso per il moto è il punto fisso  $(\bar{x}, 0)$  che rappresenta **l'unica traiettoria di fase possibile che è la quiete**.

Unendo i risultati ottenuti per tutti gli intervalli di energia meccanica, possiamo costruire il diagramma di fase nell'intorno di un punto di energia potenziale che viene definito **punto di equilibrio stabile o centro stabile** come in Figura 3.8 e in questo caso la matrice Hessiana dell'energia meccanica in  $\bar{x}$  è **definita positiva**

$$\begin{pmatrix} V''(\bar{x}) & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

poichè  $V''(\bar{x}) > 0$  in quanto  $\bar{x}$  è un punto di minimo e  $m$  è sempre positiva.

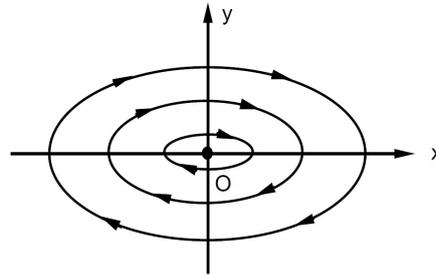


Figura 3.8: centro stabile

4.  $V(x)$  dotata di un flesso ascendente (discendente) con tangente orizzontale
- Per prima cosa ricordiamo che un flesso è un punto nel grafico di una funzione in cui la derivata seconda cambia segno, manifestando un cambiamento di concavità. Quest'ultimo si definisce ascendente se la funzione passa sopra la retta individuata dalla derivata nel punto di flesso, discendente altrimenti. Inoltre il flesso è orizzontale, se la tangente nel punto è orizzontale, ovvero se si annulla la derivata prima in quel punto.

Se  $V(x)$  presenta un flesso ascendente, in un punto  $\bar{x}$  si ha un **punto di equilibrio o punto fisso** che si comporta come se fosse stabile per spostamenti positivi e instabile per spostamenti negativi.

Allora complessivamente, in un intorno del punto,  $\bar{x}$  risulta essere **instabile**.

Indichiamo, come solito,  $V(\bar{x}) = \bar{V}$  e distinguiamo tre casi:

- a)  $E < \bar{V}$

In questo caso siamo nelle stesse condizioni del punto 1) in cui  $V(x)$  è **monotona crescente** e valgono tutte le stesse condizioni.

Esiste un **punto di inversione del moto**  $x_E < \bar{x}$  e il moto si può realizzare solo nell'intervallo  $x \leq x_E$  come mostrato in Figura 3.9 e non esistono intersezioni della curva di livello con la retta di equazione  $x = \bar{x}$  poichè essendo  $E - \bar{V} < 0$  il sistema:

$$\begin{cases} y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \\ x = \bar{x} \end{cases}$$

non ha soluzioni.

- b)  $E > \bar{V}$

In questo caso il comportamento è simile a quello osservato per  $V(x)$  monotona, ma non del tutto uguale.

Esiste, anche in questo caso **un solo punto di inversione**  $x_E > \bar{x}$  in corrispondenza di ogni valore di energia meccanica e il dominio di esistenza continua ad essere  $x \leq x_E$ , ma la funzione  $V(x)$  **non è strettamente crescente dappertutto**. Infatti nel punto di flesso la derivata di  $V(x)$  si annulla.

Esistono due punti di intersezione della curva di livello con la retta  $x = \bar{x}$  che, per convenzione, continuiamo a pensare come l'asse delle  $y$  e questi hanno coordinate:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - \bar{V})}$$

In questo caso il diagramma di fase è del tipo rappresentato in Figura 3.10

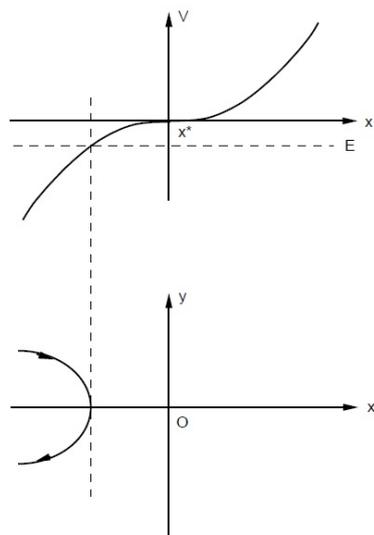


Figura 3.9: punto di inversione a sinistra di un flesso ascendente di energia potenziale

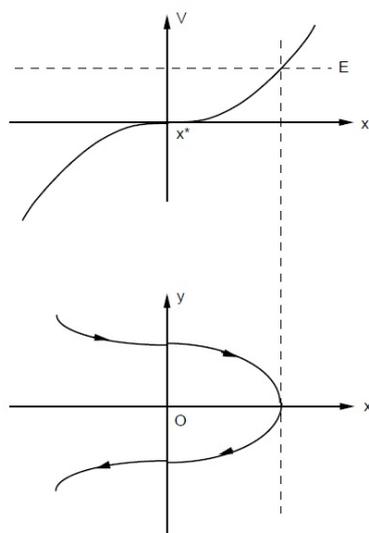


Figura 3.10: punto di inversione a destra di un flesso ascendente di energia potenziale

c)  $E = \bar{V}$

Data la condizione di non decrescenza di  $V(x)$ , si ha che il dominio di esistenza della radice è dato da:

$$E - V(x) = \bar{V} - V(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \bar{x}$$

Quindi  $f(x)$  ha una unica radice  $\bar{x}$  di molteplicità  $m = 3$  ovvero è nulla sia la derivata prima, che la derivata seconda, a causa della presenza del flesso per il quale  $V'(\bar{x}) = 0$  e  $V''(\bar{x}) = 0$ . La curva  $y = E$  e la curva della energia potenziale sono tangenti e si dice che hanno un contatto del secondo ordine in  $\bar{x}$ . In questo caso, come trattato nel capitolo precedente, la radice è multipla e il moto è **asintotico verso  $\bar{x}$** .

Il punto  $(\bar{x}, 0)$  viene chiamato **cuspidi instabile** ed è un **punto di equilibrio instabile**.

La curva di livello corrispondente ha equazione:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(\bar{V} - V(x))}$$

e come si vede facilmente, i due rami corrispondenti ai due segni, hanno in comune solo il punto di fase di coordinate  $(\bar{x}, 0)$  che però non viene mai raggiunto.

È bene notare che questo è un punto fisso e quando viene assegnato come condizione iniziale coincide con la traiettoria di fase di **quiete**.

Unendo i risultati ottenuti a tutti gli intervalli di energia meccanica, otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di flesso dell'energia potenziale in Figura 3.11.

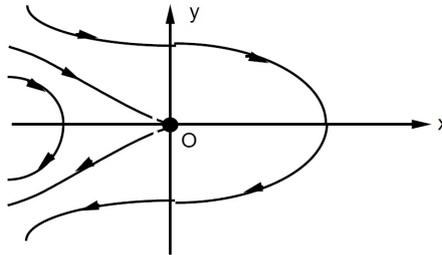


Figura 3.11: cuspide instabile

##### 5. $V(x)$ dotata di massimi e minimi alternati

In base ai risultati trovati nei casi precedenti, è possibile trattare casi più complicati in cui i massimi, minimi e flessi si combinano tra loro nell'andamento dell'energia potenziale.

Bisogna semplicemente considerare separatamente gli intervalli dell'energia meccanica totale in base ai valori che l'energia potenziale assume in corrispondenza dei massimi, minimi e dei flessi.

Consideriamo ad esempio il caso in cui l'energia potenziale sia dotata di un **massimo compreso tra due minimi**; in questo caso avremo un **punto di sella instabile** compreso tra **due centri stabili** e il diagramma di fase sarà del tipo rappresentato in Figura 3.12.

Come si può notare il diagramma è del tipo dato in Figura 3.8 nell'intorno dei centri stabili, che corrispondono ai minimi di energia potenziale e del tipo della Figura 3.6 nell'intorno del punto di sella instabile, corrispondente al punto di massimo. Nel caso, invece di un **minimo compreso tra due massimi**, è facile capire che il grafico sarà della forma di Figura 3.13.

Si può notare che quando si hanno più punti di sella, si hanno tante curve separatrici distinte quanti sono i massimi di  $V(x)$  distinti.

Vale la pena notare che lo studio da noi condotto nel caso particolare di un sistema unidimensionale e conservativo che ammette come integrale primo quello della energia meccanica, può essere generalizzato a un qualsiasi sistema autonomo che ammette un **qualunque integrale primo indipendente dal tempo**.

Inoltre identificare un integrale primo equivale ad identificare le curve integrali e viceversa. Infatti per definizione di integrale primo si deve avere:

$$\psi(x(t), y(t)) = C$$

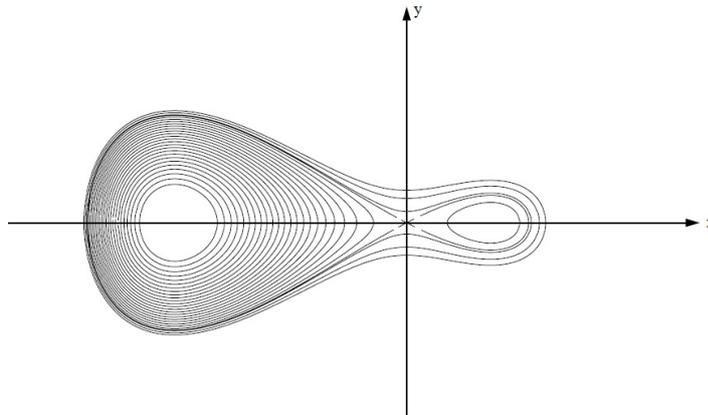


Figura 3.12: punto di sella instabile compreso fra due centri stabili

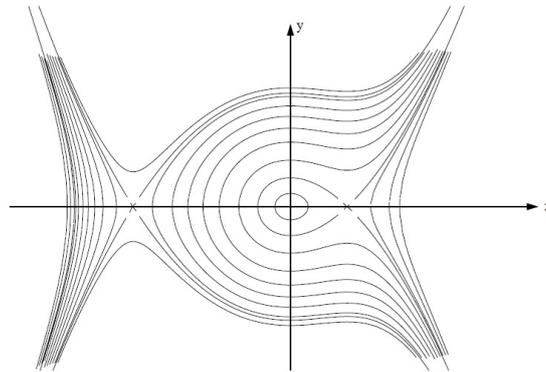


Figura 3.13: centro stabile tra punti di sella instabili

quindi le curve parametriche:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

che rappresentano le traiettorie di fase del moto, non sono altro che le curve di livello dell'integrale primo. Di conseguenza:

$$\frac{d\psi}{dt}(x(t), y(t)) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\dot{y} = 0$$

da cui:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}.$$

Questo risultato deve essere compatibile con l'equazione delle delle curve integrali (3.1), per cui abbiamo la condizione affinché una funzione  $\psi(x, y)$  sia un integrale primo per un sistema autonomo di equazione del moto:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{y}f(x, y).$$

L'integrale primo dell'energia, da noi utilizzato, costituisce un caso particolare, vantaggioso in quanto consente di ricondurre lo studio qualitativo del moto allo studio dell'energia potenziale.

### 3.3 Diagramma di fase per l'oscillatore armonico semplice

L'energia potenziale per l'oscillatore armonico è data da:

$$V(x) = \frac{1}{2}k^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad \text{ponendo} \quad \omega^2 = \frac{k^2}{m}$$

Allora si ha che l'integrale primo del moto è dato da:

$$\frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E,$$

che si può riscrivere in una forma geometricamente più semplice:

$$\frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{y^2}{\frac{2E}{m}} = 1$$

da cui è facile capire che le curve di livello dell'energia sono delle **ellissi** di centro l'origine del piano delle fasi, che è anche un punto fisso o di equilibrio, e assi di simmetria gli assi cartesiani.

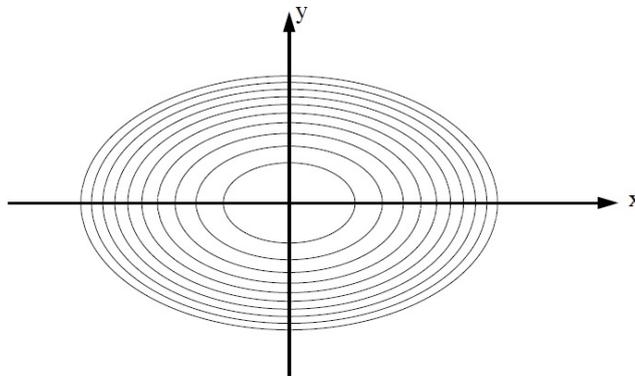


Figura 3.14: curve di livello dell'oscillatore armonico semplice

### 3.4 Diagramma di fase del pendolo semplice

Come studiato nel capitolo precedente il pendolo semplice è caratterizzato dall'energia potenziale:

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta))$$

e l'integrale primo dell'energia è dato da:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta)) = E.$$

Consideriamo ora le curve di livello dell'energia trascrivendo l'integrale primo in termini delle variabili  $x = \theta$  e  $y = \dot{\theta}$  si ottiene:

$$\frac{1}{2}ml^2y^2 + mgl(1 - \cos x) = E.$$

Pertanto esplicitando in  $y$  si ottiene:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{ml^2}[E - mgl(1 - \cos x)]}$$

I punti fissi si trovano imponendo che la derivata prima dell'energia potenziale sia nulla (ovvero che sia nulla l'accelerazione) e poi si devono considerare quei particolari valori di  $E$  per cui anche la velocità sia nulla. Poichè

$$V'(x) = mgl \sin x, \quad V''(x) = mgl \cos x$$

allora  $V'(x)$  si annulla per  $x = k\pi$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e si può facilmente notare che per questi valori  $V''(x)$  non si annulla mai infatti:

$$V''(x) = (-1)^k mgl.$$

Pertanto si ha che i punti fissi sono alternativamente punti di **massimo e minimo** infatti:

$$\begin{cases} x = 2k\pi, & \bar{V} = mgl \text{ minimi (centri stabili)} \\ x = (2k+1)\pi, & \bar{V} = -mgl \text{ massimi (selle instabili)} \end{cases}$$

Il **diagramma di fase** sarà quindi della forma rappresentata in Figura 3.15

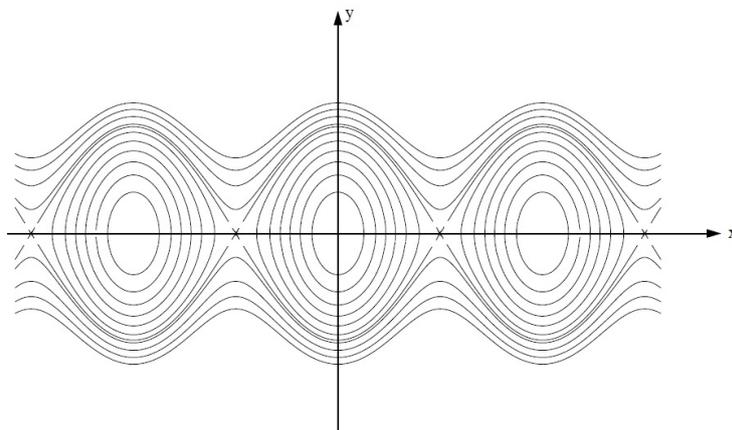


Figura 3.15: diagramma di fase del pendolo semplice

Si osserva come, nell'intorno di un centro stabile, per esempio l'origine del piano delle fasi, le curve di livello si approssimano a delle ellissi, cioè alle curve di un **oscillatore armonico semplice**. Infatti, come visto nel capitolo precedente, nel caso di **piccole oscillazioni** nell'intorno della posizione di equilibrio stabile, le equazioni del moto del pendolo si approssimano alla equazione di un oscillatore armonico semplice:

$$\dot{y} = -\omega^2 x$$

di frequenza:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Le curve di livello del pendolo semplice, in questa approssimazione, hanno infatti equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a^2 = \frac{2E}{mgl}, \quad b^2 = \frac{2E}{ml^2}.$$



## Capitolo 4

# Metodo delle approssimazioni successive e delle perturbazioni

In questo capitolo accenneremo ad altri due metodi qualitativi di analisi matematica, per lo studio delle oscillazioni non lineari.

### 4.1 Metodo delle approssimazioni successive

Per illustrare il **metodo delle approssimazioni successive** consideriamo una forza del tipo:

$$F(x) = -kx - m\epsilon x^3, \quad k > 0, \quad m > 0, \quad \epsilon > 0$$

a cui corrisponde l'energia potenziale:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}m\epsilon x^4.$$

Vogliamo studiare le oscillazioni di una particella di massa  $m$  soggetta alla forza  $F(x)$  e ad una forza di tipo sinusoidale. L'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{x} = -kx - m\epsilon x^3 + B \cos \omega t$$

che può essere riscritta nella forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = A \cos \omega t, \quad (4.1)$$

avendo posto  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  e  $A = \frac{B}{m}$ . Il **metodo delle approssimazioni successive** consiste nell'ipotizzare una soluzione approssimante che chiameremo  $x_1$  per (4.1) e quindi risolvere l'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x_1 - \epsilon x_1^3 + A \cos \omega t \quad (4.2)$$

la cui soluzione verrà chiamata  $x_2$  e sarà introdotta nuovamente in (4.2) al posto di  $x_1$ . Quindi si ripete il procedimento costruendo una successione di funzioni  $x_n$  che soddisfano la successione di equazioni

$$\ddot{x}_n = -\omega_0^2 x_{n-1} - \epsilon x_{n-1}^3 + A \cos \omega t, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Se la scelta iniziale della soluzione approssimante  $x_1$  è buona, ovvero non troppo lontana dall'essere esatta, questa successione converge abbastanza rapidamente alla soluzione esatta.

Scegliamo come prima soluzione approssimata di (4.1) una soluzione dello stesso tipo del termine noto:

$$x_1 = C_1 \cos \omega t$$

dove  $C_1$  è un valore indeterminato. Per questa scelta di  $x_1$  andiamo a riscrivere la (4.2):

$$\ddot{x} = -\epsilon C_1^3 \cos^3 \omega t - \omega_0^2 C_1 \cos \omega t + A \cos \omega t. \quad (4.4)$$

Cerchiamo di modificare la forma di tale equazione ricordando che:

$$\cos 3\omega t = \cos(\omega t + 2\omega t) = \cos 2\omega t \cos \omega t - \sin 2\omega t \sin \omega t.$$

Utilizzando nuovamente le formule di addizione per seno e coseno e sostituendole a  $\cos 2\omega t$  e  $\sin 2\omega t$ , si ottiene:

$$\cos 3\omega t = (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) \cos \omega t - 2 \sin^2 \omega t \cos \omega.$$

Ricordando che  $\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t$  si ha

$$\cos 3\omega t = (\cos^2 \omega t - 1 + \cos^2 \omega t) \cos \omega t - 2(1 - \cos^2 \omega t) \cos \omega t$$

che si può riscrivere come:

$$\cos 3\omega t = \cos^3 \omega t - (1 - \cos^2 \omega t) \cos \omega t + 2 \cos^3 \omega t - 2 \cos \omega t = 4 \cos^3 \omega t - 3 \cos \omega t,$$

da cui si ottiene  $\cos^3 \omega t = \frac{\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t}{4}$ . Sostituendo in (4.4) si ha

$$\ddot{x} = -\epsilon C_1^3 \frac{\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t}{4} - \omega_0^2 C_1 \cos \omega t + A \cos \omega t,$$

per cui la (4.4) risulta così equivalente alla seguente equazione

$$\ddot{x} = \left( -\frac{3}{4} \epsilon C_1^3 - \omega_0^2 C_1 + A \right) \cos \omega t - \frac{\epsilon}{4} C_1^3 \cos 3\omega t. \quad (4.5)$$

Integrando due volte si può verificare che la soluzione di (4.5) deve essere una combinazione lineare di  $\cos \omega t$  e  $\cos 3\omega t$  e in particolare la scegliamo proprio del tipo:

$$x_2 = C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 3\omega t, \quad (4.6)$$

in modo da dover determinare solamente un nuovo coefficiente ad ogni iterazione.

Vale la pena notare che il termine  $C_2 \cos 3\omega t$  è dovuto alla presenza del termine non lineare:  $m \in x^3$ .

Continuando nel procedimento iterativo otteniamo soluzioni approssimate contenenti termini sinusoidali di frequenza  $\omega$ ,  $3\omega$ ,  $5\omega$ ,  $7\omega$ , ..., cioè la soluzione risulta espressa mediante una serie di termini sinusoidali di frequenze dispari. Infatti  $x_3$  sarà del tipo:

$$x_3 = C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 3\omega t + C_3 \cos 5\omega t$$

e allo stesso modo:

$$x_n = \sum_{k=1}^n C_k \cos((2k-1)\omega t), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi facendo tendere  $n$  all'infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos((2k-1)\omega t) < \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$$

che sotto opportune ipotesi per i coefficienti è una serie convergente che convergerà alla soluzione esatta.

Consideriamo il caso in cui la funzione  $x_1$  risulti già un buon valore approssimante della soluzione e decidiamo di fermare il procedimento a  $x_2$ , che sceglieremo come soluzione approssimata. Pertanto cerchiamo le ipotesi sui coefficienti per avere convergenza. Se  $x_2$  fosse una soluzione esatta di (4.1) dovrebbe essere:

$$\omega^2(C_1 \cos \omega t + 9C_2 \cos 3\omega t) = \epsilon(C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 3\omega t)^3 + \omega_0^2(C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 3\omega t) - A \cos \omega t. \quad (4.7)$$

siccome  $x_2$  deve soddisfare (4.5) ne viene che:

$$\begin{cases} -C_1\omega^2 = -\frac{3}{4}\epsilon C_1^3 - \omega_0^2 C_1 + A \\ -9C_2\omega^2 = -\frac{\epsilon}{4}C_1^3 \end{cases} \quad (4.8)$$

allora euguagliando le relazioni tra i coefficienti di (4.7) e (4.8) si ha che per avere convergenza alla soluzione  $x_2$  si deve supporre  $\epsilon$  piccolo e  $C_2$  piccolo rispetto a  $C_1$  in modo da poter trascurare in (4.7) le potenze superiori alla prima di questi termini.

Inoltre in (4.7) si trova il termine  $\omega_0^2 C_2$  che non compare in (4.8), ma per poter trascurare questo termine occorrerebbe supporre  $\omega_0$  piccolo, ma questo porterebbe a dover trascurare anche  $\omega_0^2 C_1$  che però compare sia in (4.7) che in (4.8), oppure  $C_1$  piccolo ma anche in questo caso si dovrebbero trascurare termini che sono presenti in entrambe le scritte.

Quindi questo termine è proprio quello che differenzia la soluzione esatta da quella approssimata. Ora tenendo conto di queste ipotesi da (4.7) si ha:

$$\left(\omega^2 C_1 - \omega_0^2 C_1 - \frac{3}{4}C_1^3 \epsilon + A\right) \cos \omega t + \left(9\omega^2 C_2 - \omega_0^2 C_2 - \frac{1}{4}C_1^3 \epsilon\right) \cos 3\omega t = 0. \quad (4.9)$$

Inoltre  $\cos \omega t$  e  $\cos 3\omega t$  sono linearmente indipendenti, infatti ponendo:

$$a \cos \omega t + b \cos 3\omega t = 0,$$

e derivando due volte si ottiene un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a\omega \sin \omega t + 3b\omega \sin 3\omega t = 0 \\ a\omega^2 \cos \omega t + 9b\omega^2 \cos 3\omega t = 0 \end{cases}$$

da cui si giunge facilmente ad avere:

$$a = b = 0.$$

Pertanto, da (4.9) deve risultare:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2) C_1 - \frac{3}{4}C_1^3 \epsilon + A = 0 \\ (9\omega^2 - \omega_0^2) C_2 - \frac{1}{4}C_1^3 \epsilon = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Ricavando  $C_2$  in funzione di  $C_1$  si ha:

$$C_2 = \frac{\epsilon C_1^3}{4(9\omega^2 - \omega_0^2)}$$

e la soluzione approssimata (4.6) diventa così:

$$x_2 = C_1 \cos \omega t + \frac{\epsilon C_1^3}{4(9\omega^2 - \omega_0^2)} \cos 3\omega t, \quad (4.11)$$

dove  $C_1$  è vincolata dalla equazione (4.10) e per la presenza di  $\epsilon$  l'ultimo termine di (4.11) ha un piccolo contributo. Anche se, quando si approssima  $\omega$  a  $\frac{\omega_0}{3}$ , l'ampiezza di  $C_2$  va all'infinito, ma tale singolarità è dovuta alla nostra necessità di approssimare la soluzione con soli due termini della serie, qualora considerassimo più termini la singolarità sparirebbe. Quindi è corretto supporre  $C_1 \cos \omega t$  come il termine principale della soluzione  $x_2$ . Ora vogliamo trovare un valore approssimato di  $C_1$  che è legato a  $\omega$  dalla equazione (4.10). Dividiamo per  $\omega_0^2$ :

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) C_1 + \frac{A}{\omega_0^2} = \frac{3 C_1^3 \epsilon}{4 \omega_0^2}. \tag{4.12}$$

Lo studio delle radici di questa equazione può essere fatto pensando (4.12) come l'intersezione delle curve:

$$y = \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) C_1 + \frac{A}{\omega_0^2} \tag{4.13}$$

$$y = \frac{3 C_1^3 \epsilon}{4 \omega_0^2} \tag{4.14}$$

che sono rappresentate rispettivamente, in un grafico di ascissa  $C_1$  e ordianata  $y$  come in Figura 4.1 da una cubica e da rette passanti per il punto  $H = \left(0, \frac{A}{\omega_0^2}\right)$  per ogni fissato valore di  $\omega$ .

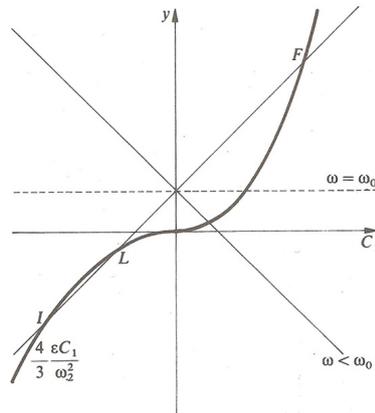


Figura 4.1: cubica e rette

La retta descritta da (4.13) per ogni fissato valore di  $\omega$  avrà una, due o tre intersezioni con la curva descritta da (4.14) a seconda che  $\omega$  sia maggiore, minore o uguale a un valore caratteristico che possiamo chiamare  $\omega_1$ .

Ricavando  $\omega$  in funzione di  $C_1$  da (4.12):

$$\omega = \sqrt{\frac{3C_1^2 \epsilon}{4} - \frac{A}{C_1} + \omega_0^2}$$

e facendo il simmetrico rispetto alla bisettrice si ottiene un grafico del tipo in Figura 4.2. Come si può vedere quando la frequenza  $\omega$  della forza impressa aumenta, anche l'ampiezza del moto aumenta secondo una parabola cubica fintanto che  $\omega$  è minore di  $\omega_1$ . In corrispondenza di tale valore la retta (4.13) incontra la parabola cubica (4.14) in due punti  $G$  ed  $F$  e quindi in corrispondenza di tali valori vi sono due differenti valori per l'ampiezza del moto.

Quando  $\omega$  è maggiore di  $\omega_1$  il sistema dato da (4.13) e (4.14) ammette tre radici reali e

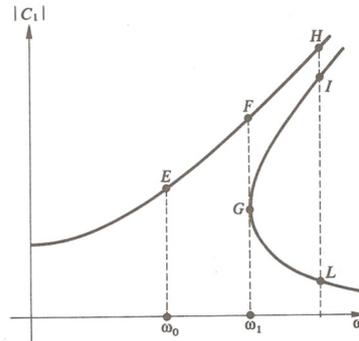


Figura 4.2: Parabola cubica

distinte di cui soltanto una rimane finita al tendere di  $\omega$  all'infinito. Questo risultato può apparire strano, ma è conseguenza della approssimazione eseguita sulla soluzione  $x_2$ . Infatti tale risultato viene rimosso se si lavora con la soluzione esatta e in questo caso è bene osservare che il comportamento dell'ampiezza in funzione della frequenza  $\omega$  è descritto da un grafico del tipo in Figura 4.3.

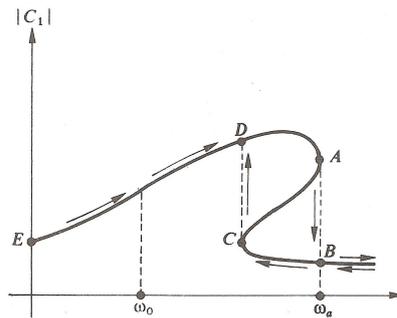


Figura 4.3: .

Come si può osservare l'ampiezza ha sempre un valore finito qualunque sia  $\omega$  e questo comportamento è dovuto alla presenza di termini non lineari che hanno l'effetto di eliminare il fenomeno di risonanza che si verifica quando un sistema oscillante forzato viene sottoposto a sollecitazione periodica di frequenza pari all'oscillazione propria del sistema stesso. Con l'aumentare dell'ampiezza i termini non lineari contribuiscono a spostare la frequenza dal valore di risonanza.

## 4.2 Metodo delle perturbazione

Per illustrare questo secondo metodo, consideriamo una forza del tipo:

$$F(x) = -kx + \epsilon mx^2 \quad (\epsilon > 0) \tag{4.15}$$

e la relativa equazione del moto:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \epsilon x^2 = 0 \quad \omega_0 = \frac{k}{m} \tag{4.16}$$

Il metodo consiste nel determinare una soluzione approssimata del moto, partendo dall'ipotesi che per piccoli valori di  $\epsilon$  la soluzione possa essere scritta nella forma:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (4.17)$$

dove  $x_0$  è soluzione del moto per  $\epsilon = 0$ , mentre  $x_1, x_2, \dots$  sono scelti in modo tale che le funzioni:

$$x_0 + \epsilon x_1, \quad x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2, \dots$$

risultino soluzioni approssimate di (4.16).

Per prima cosa si sostituisce la funzione  $x_0 + \epsilon x_1$  in (4.16) e si trascurano, nell'ipotesi di piccoli valori di  $\epsilon$ , le potenze di  $\epsilon$  superiori alla prima. Si ha così:

$$\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_0 + \omega_0^2 \epsilon x_1 - \epsilon x_0^2 = 0,$$

ovvero

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \epsilon (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^2) = 0.$$

Quindi, poichè  $x_0$  è soluzione del moto armonico, si ha:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (4.18)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^2. \quad (4.19)$$

Ovviamente è possibile trovare facilmente la soluzione dell'equazione (4.18):

$$x_0 = A \cos \omega_0 t.$$

Quindi sostituiamo in (4.19) e, ricordando che  $\cos 2\omega_0 t = 2 \cos^2 \omega_0 t - 1$ , otteniamo:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = A^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{A^2}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t). \quad (4.20)$$

In questa equazione calcoliamo solo la soluzione particolare poichè quella della omogenea, essendo dello stesso tipo di (4.18), verrà pensata come già contenuta in  $x_0$ . Scegliamo come possibile soluzione particolare di (4.20) una funzione del tipo

$$x_1 = B \cos 2\omega_0 t + C$$

per cui sostituendo in (4.20) abbiamo:

$$-4\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t + \omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t + \omega_0^2 C = \frac{A^2}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t)$$

e quindi:

$$-3\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t + \omega_0^2 C = \frac{A^2}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t).$$

Pertanto i coefficienti  $B$  e  $C$  sono dati da:

$$B = -\frac{A^2}{6\omega_0^2}, \quad C = \frac{A^2}{2\omega_0^2}.$$

Quindi il primo valore approssimato dell'equazione non lineare (4.16) è dato da:

$$x(t) = x_0 + \epsilon x_1 = A \cos \omega_0 t - \frac{\epsilon A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + \frac{\epsilon A^2}{2\omega_0^2}.$$

Pertanto la non linearità della equazione (4.16) del tipo  $\epsilon m x^2$  comporta la necessità di introdurre un termine di frequenza  $2\omega_0$  nella prima soluzione approssimata.

Procedendo analogamente si può provare che la soluzione si ottiene come una serie di funzioni armoniche di frequenze:

$$2\omega_0, \quad 3\omega_0, \quad 4\omega_0, \dots, n\omega_0, \dots$$

# Bibliografia

- [1] Mauro Fabrizio, *La meccanica razionale e i suoi metodi matematici*, Bologna, Zanichelli, 1989
- [2] Dario Graffi, *Elementi di meccanica razionale*, Bologna, Pàtron, 1973
- [3] Sandro Graffi, *Appunti dalle lezioni di Fisica matematica II del prof. Sandro Graffi*, Mathematical Physics Research Group, [www.dm.unibo.it/fisimat/didattica.html](http://www.dm.unibo.it/fisimat/didattica.html)
- [4] Alberto Strumia, *Meccanica razionale*, Bologna, Nautilus, 1996