

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
indirizzo Generale e Applicativo

REVERSE CONVERTIBLE BONDS

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Prof.ssa Rossella Agliardi

Presentata da:
Martina Valeri

Correlatore:
Prof. Andrea Pascucci

I Sessione
Anno Accademico 2015/2016

*A mia madre,
la quale mi ha trasmesso la determinazione
che mi ha portata a raggiungere
obiettivi importanti come questo.
Sarai sempre la mia forza.*

Introduzione

La maggior parte delle emissioni bancarie, negli ultimi decenni, è costituita da obbligazioni strutturate. Questo strumento finanziario è così definito in quanto costituito da due componenti di reddito:

1. una componente obbligazionaria tradizionale, che garantisce il rimborso del capitale a scadenza (per l'intero valore nominale) più eventuali cedole periodiche;
2. una componente derivata il cui rendimento può subire notevoli variazioni in quanto strettamente correlato ad uno o più sottostanti.

Tra gli esempi di obbligazioni strutturate vi sono i convertible bonds e i reverse convertible bonds.

I *convertible bonds*, argomento trattato nel capitolo 1, sono degli strumenti finanziari che conferiscono al suo possessore la facoltà di scegliere se, una volta scaduta l'obbligazione (dato che in questa tesi si sono trattate obbligazioni di tipo europeo e non americano), essere rimborsato tramite una somma di denaro (valore nominale) oppure convertire l'obbligazione in un numero predefinito di azioni (che possono essere della stessa società che ha emesso l'obbligazione oppure di una società diversa). Un convertible bond può essere considerato come una normale obbligazione con un'opzione call sulle azioni di compendio. Come si potrà osservare in un esempio presente all'interno del capitolo, l'allocazione di obbligazioni convertibili all'interno di un portafoglio costituito da azioni ed obbligazioni fa registrare un aumento di rendimento in termini di performance e una riduzione della volatilità. Ciò è dovuto al duplice vantaggio delle obbligazioni convertibili: partecipazione al rialzo e protezione al ribasso. Si è, inoltre, notato che con un portafoglio costituito da azioni e obbligazioni, l'unico modo per ottenere maggior profitto è aumentare il rischio. Aggiungendo, invece, nel portafoglio i convertible bonds è possibile aumentare i rendimenti attesi mantenendo invariato il rischio. Questa tipologia di obbligazioni presenta, oltre a numerosi vantaggi, anche degli svantaggi: se non adeguatamente gestito risulterebbe più conveniente possedere azioni o obbligazioni; inoltre è un investimento altamente rischioso dato che il suo rendimento dipende dall'andamento del titolo azionario sottostante.

A seconda di quale sia il titolo azionario sottostante, i reverse convertible bonds assumono una diversa forma e denominazione. Si sono analizzati i seguenti esempi: reverse convertible knock-in, knock-out, one touch e di terza generazione (Linked).

Nel secondo capitolo, vengono illustrate le caratteristiche dei *reverse convertible bonds*, argomento di questa tesi. Tali obbligazioni sono simili ai convertible bonds ma in questo caso il diritto di scegliere se convertire o meno l'obbligazione in azioni è lasciato all'emittente e non al sottoscrittore. I reverse convertible si ottengono dalla combinazione di un coupon bond ordinario (senza l'opzione di conversione) a breve termine e di un'opzione put sulle azioni sottostanti. Questi strumenti finanziari conferiscono all'investitore una cedola particolarmente elevata a fronte del rischio di ricevere a scadenza un numero di azioni di valore inferiore all'investimento fatto. Sono di particolare importanza in quanto permettono alle banche di sostenere la raccolta del risparmio e poter coprire rischi altrimenti assunti. Chi acquista uno strumento di questo tipo, il massimo guadagno lo può ricavare se il valore dell'azione sottostante non cala al di sotto del prezzo strike. Per tale motivo, chi ha aspettative di forte rialzo dell'azione sottostante può avere maggior interesse ad acquistare direttamente le azioni perché il profitto derivante dall'acquisto di un reverse convertible non può in alcun caso eccedere la cedola, il cui valore è prefissato.

Nel terzo capitolo si vedrà la formula di valutazione dei reverse convertible bonds, data dalla differenza tra il prezzo di un coupon-bond ordinario emesso dalla stessa società e il prezzo di un'opzione put (quest'ultimo moltiplicato per il rapporto di conversione, ossia per il numero di azioni che si ottengono dalla conversione di ciascuna obbligazione convertibile).

Il prezzo di un'obbligazione ordinaria è pari al valore attuale dei flussi di cassa futuri del titolo. Essendo i reverse convertible bonds obbligazioni con rischio di default, il tasso di interesse considerato nella formula è dato dalla somma del tasso di interesse risk-free più un premio al rischio corrisposto dall'emittente all'investitore per l'eventualità che possa fallire.

Il prezzo dell'opzione put è stato, invece, determinato utilizzando il *metodo di portafoglio di arbitraggio o della PDE*.

Nel quarto capitolo, vengono illustrati i risultati di un'analisi empirica dei prezzi dei reverse convertible bonds. Sono stati calcolati i prezzi di 7 reverse convertible utilizzando i dati forniti dal database finanziario e macroeconomico, Thomson Reuters Datastream.

I prezzi calcolati sono stati poi confrontati con i prezzi di mercato di tali obbligazioni relativamente allo stesso istante temporale, il giorno 6/6/2016.

Successivamente si è verificato se nei reverse convertible bonds presi in esame ci fosse un sovrapprezzo o un sottoprezzo del valore fornito dal mercato, andando a calcolare l'overvaluation.

In fondo alla tesi si è ritenuto opportuno inserire due appendici: una terminologia che raccoglie i termini tecnici che coinvolgono direttamente i convertible bonds e i reverse convertible bonds e una sulle opzioni esotiche, dato che a volte sono state nominate all'interno dei capitoli.

Indice

1	Convertible bonds	1
1.1	Payoff	2
1.2	Vantaggi dei convertible bonds	3
1.2.1	Per l'emittente	3
1.2.2	Per l'investitore	5
1.3	Svantaggi per gli investitori	10
2	Reverse convertible bonds	11
2.1	Payoff	12
2.2	Emissione	13
2.3	Strategia di copertura del rischio	14
2.4	Reverse convertible knock-in	15
2.5	Reverse convertible knock-out	16
2.6	Reverse convertible one touch	16
2.7	Reverse convertible di terza generazione (Linked)	17
2.8	Conclusioni	17
3	La valutazione dei reverse convertible bonds	19
3.1	Valutazione di un coupon-bond ordinario	20
3.2	Valutazione dell'opzione put	23
4	Analisi empirica dei prezzi dei reverse convertible bonds	31
A	Terminologia	41
B	Opzioni Esotiche	45
	Bibliografia	49
	Ringraziamenti	51

Capitolo 1

Convertible bonds

I *titoli ibridi* sono titoli che presentano insieme caratteristiche proprie sia delle obbligazioni che delle azioni. Il più importante membro di questa classe di titoli è il *convertible bond*. Un *convertible bond* è uno strumento finanziario che conferisce al suo possessore la facoltà di convertirlo in un numero predefinito di azioni, definite *azioni di compendio*, della stessa società che ha emesso l'obbligazione (conversione diretta), ovvero di una terza società (conversione indiretta). Tale conversione non è obbligatoria ma è un'opzione per l'investitore. L'obbligazione convertibile, dunque, come le tradizionali obbligazioni ha una data di scadenza prefissata e la garanzia di una cedola (fissa o variabile), mentre come le azioni possono beneficiare dei rialzi dei mercati azionari.

Le obbligazioni di questa tipologia sono al crocevia di tre classi di titoli finanziari: equity, reddito fisso e, in misura minore, valute. Il prezzo e la gestione del rischio dei convertible bonds hanno tratto enormi benefici dallo sviluppo dei derivati azionari e dall'avvento dei derivati su rischio di credito. Relativamente ai derivati azionari si è fatta molta strada dalla svolta di Black e Scholes nel 1973 all'introduzione negli anni '90 dei più avanzati modelli di volatilità¹ stocastica. Il mercato dei *credit default swaps*² ha introdotto nell'area dei convertible bonds il concetto di *default probability*³ e di *recovery rates*⁴.

I convertible bonds non sono strumenti del tutto nuovi. Risale al 1881 l'emissione della prima obbligazione convertibile. Il magnate delle ferrovie J. J. Hill aveva bisogno di un metodo innovativo per incentivare un maggior numero di investitori a finanziare la propria compagnia ferroviaria, caratterizzata da un'alta volatilità. Il mercato dei corporate bonds si è sviluppato molto da quella prima emissione avvenuta più di un secolo fa, ma la peculiarità di avere in un singolo strumento caratteristiche proprie sia delle azioni che delle obbligazioni è rimasta la stessa.

¹La *volatilità* misura (in %) l'ampiezza della performance a breve termine di un asset rispetto alla sua performance a lungo termine. Più il prezzo di un asset varia nel tempo, più esso è volatile e quindi rischioso.

²I *credit default swaps (CDS)* sono contratti che offrono la possibilità di coprirsi dall'eventuale default di un debitore contro il pagamento di un premio periodico.

³La *default probability (PD)* rappresenta la probabilità che il debitore non adempia ai suoi obblighi di rimborso del debito.

⁴Il *recovery rate (tasso di recupero)* rappresenta la percentuale che l'obbligazionista recupera, rispetto al valore del bond, quando la società emittente finisce in default.

1.1 Payoff

Il possessore di un convertible bond ha diritto alla scadenza di scambiare il *valore facciale*⁵ N del bond con C_r azioni di valore S . C_r rappresenta il *rapporto di conversione*⁶, ossia il numero di azioni ottenibili dalla conversione di ciascuna obbligazione. In genere il rapporto di conversione, fissato al momento dell'emissione delle obbligazioni, resta invariato per tutta la durata del prestito, a meno che nel frattempo non intervengano operazioni sul capitale della società tali da comportarne un adeguamento.

Il payoff finale del convertible bond è, quindi, definito nel seguente modo:

$$\max(N, C_r \times S) \quad (1.1)$$

Si noti che un convertible bond può essere considerato come una normale obbligazione con un'opzione call⁷ sulle azioni di compendio. Se si prende in esame un convertible bond zero-coupon (ossia un'obbligazione convertibile priva di cedola⁸), è possibile, dunque, riscrivere il payoff (1.1):

$$N + \max(0, C_r \times S - N) \quad (1.2)$$

Pertanto tale payoff può essere visto come la somma del payoff di un'obbligazione standard (senza l'opzione di conversione) e un certo numero (C_r) di opzioni call sull'azione sottostante. Per la *put-call parity*⁹, possedere un convertible bond è economicamente equivalente ad avere C_r azioni con un'opzione put Europea così da vendere tali azioni in cambio del valore facciale N del convertible bond. Analizzandolo sotto questo punto di vista si può definire il payoff anche nel modo seguente:

$$C_r \times S + \max(N - C_r \times S, 0) \quad (1.4)$$

La decisione presa dall'investitore, se rimanere creditore della società emittente o convertire le obbligazioni in azioni, dipende dall'andamento delle azioni ordinarie sottostanti. Nel caso in cui il *valore di conversione* C_v ($C_r \times S$), o anche definito *parity* P_a ¹⁰, sia abbastanza alto,

⁵Si veda *Appendice A*.

⁶Si veda *Appendice A*.

⁷Si veda *Appendice A*.

⁸Si veda *Appendice A*.

⁹La *put-call parity* è un'equazione che stabilisce la relazione tra il prezzo di un'opzione call e di un'opzione put. Se i prezzi delle opzioni non rispettassero questa formula, potrebbero accadere degli arbitraggi, ossia sarebbe possibile ottenere dei profitti senza assumersi alcun rischio. L'equazione è definita nel modo seguente:

$$S_t + Put(t, K) = Call(t, K) + K e^{-r(T-t)} \quad (1.3)$$

dove

S_t è il prezzo del sottostante al tempo t ;

$Put(t, K)$ è il valore dell'opzione put al tempo t e al prezzo strike K ;

$Call(t, K)$ è il valore dell'opzione call al tempo t e al prezzo strike K ;

r è il tasso risk-free di un titolo.

¹⁰Si veda *Appendice A*.

l'investitore eserciterà il suo diritto di conversione. Ciò accade quando il *dividend yield*¹¹, che si potrebbe guadagnare dalle azioni, è più alto se paragonato al coupon che si guadagnerebbe sul bond. Fino ad ora si è analizzato il convertible bond facendo riferimento alle opzioni Europee, le quali permettono di convertire esclusivamente alla scadenza. Ci sono inoltre molte obbligazioni convertibili in stile americano. Queste danno la possibilità di convertire il bond durante un periodo prefissato ($\Omega_{Conversion}$) anche precedente alla scadenza stessa.

Se il contratto lo prevede, l'emittente ha in un determinato periodo, definito *periodo call* (Ω_{Call}), il diritto di riacquistare il sottostante titolo convertibile ad un prezzo K , chiamato *prezzo call* o *importo di rimborso anticipato*. Qualora il bond venga richiamato dall'emittente, l'investitore può ancora convertire l'obbligazione in azioni anche in un momento diverso dal periodo di conversione ($\Omega_{Conversion}$). In questo caso la conversione è 'forzata', a differenza di quanto visto in (1.2) in cui la conversione era un'opzione dell'investitore. Una volta ricevuta la notifica da parte dell'emittente che esprime la sua intenzione a voler riacquistare il bond, un investitore razionale convertirà se

$$C_r \times S > (K + Interesse Maturato) \quad (1.5)$$

1.2 Vantaggi dei convertible bonds

I convertible bonds offrono diversi vantaggi sia per le società emittenti, che in questo modo si trovano a sostenere oneri finanziari inferiori rispetto alle obbligazioni tradizionali, sia per gli investitori, in quanto questo tipo di obbligazioni sono caratterizzate da un rapporto rischio-rendimento molto favorevole anche in periodi in cui il mercato è particolarmente volatile.

In seguito, si analizzano i vantaggi nei loro diversi aspetti.

1.2.1 Per l'emittente

Costo del capitale¹²

Franco Modigliani e Merton Miller, in un celebre articolo pubblicato nel 1958, hanno fornito la dimostrazione della tesi (sviluppata in due proposizioni) secondo la quale in assenza di tasse, costi di fallimento e asimmetrie informative, il valore di una società ed il costo del capitale non avrebbero alcuna relazione con la struttura finanziaria. Ossia, il valore dell'impresa non varia in base a come la società raccoglie i propri finanziamenti, se tramite debito o equity (proposizione I); inoltre, il costo del capitale non può essere ridotto sostituendo il debito all'equity perché nel momento in cui l'impresa aggiunge il debito, l'equity diventa più rischioso e quindi, all'aumentare del rischio, aumenta anche il costo del capitale azionario (proposizione II).

Il vantaggio principale per una società che emette convertible bonds è quello di ridurre il proprio costo del capitale. L'impresa che emette le obbligazioni convertibili ottiene, infatti, liquidità pagando un coupon inferiore a quello che avrebbe dovuto pagare nel caso in cui avesse emesso una normale obbligazione.

¹¹Si veda *Appendice A*.

¹²Il *costo del capitale* rappresenta il tasso di remunerazione minimo atteso dall'investimento in una società corrisposto ai finanziatori come compenso per l'indisponibilità dei mezzi approvvigionati all'azienda e per il rischio di una loro inadeguata remunerazione.

Se si confronta il *current yield*¹³ su un convertible bond e su un *corporate bond*¹⁴ emessi da una stessa società si nota che il current yield sul convertible bond è minore rispetto a quello sul corporate bond. Tale differenza è, però, compensata dal diritto dell'investitore di poter convertire l'obbligazione in azioni.

Monetizzazione del rischio

Se una società con un elevato grado di rischio di business¹⁵ richiede un prestito ad una banca o emette obbligazioni, le verrà chiesto dagli investitori un alto costo di capitale. Di conseguenza, nel caso in cui tale società abbia titoli quotati in borsa, il prezzo dei titoli sarà molto volatile e in base a questo sarà definito il costo delle opzioni. La società può, però, monetizzare questa alta volatilità utilizzando i convertible bonds. Infatti l'opzione di conversione presente in questo tipo di obbligazioni ha più valore nei titoli sottostanti volatili. Dunque, in questo caso, dato che l'opzione incorporata nel convertible bond è più costosa, la società può ridurre la tariffa del tasso di interesse.

Privatizzazione

Si è visto precedentemente che, se previsto nel contratto, vi è la possibilità per l'emittente di richiamare il debito; in questo modo l'investitore potrebbe essere costretto a convertire l'obbligazione in azioni. A volte i convertible bonds vengono, dunque, utilizzati dalle società per liberarsi di alcune azioni che possiede ma che non ha più interesse ad avere.

Diluizione¹⁶

Nel momento in cui l'obbligazione viene convertita in azioni, gli utili per azioni si riferiscono all'attuale numero di azioni sottostanti, ossia anche quelle derivanti dalla conversione. L'annuncio di aumento di capitale tramite l'emissione di un convertible bond può influire limitatamente sul prezzo delle azioni: con un rapporto di conversione molto basso si avrà un piccolo impatto sul prezzo. Ma, maggiore è il rapporto di conversione, maggiore è la possibile diluizione futura e maggiore è l'influenza della nuova emissione. Quanto l'emissione del convertible bond influisca sul prezzo delle azioni dipende dalla probabilità attesa che l'obbligazione convertibile venga convertita in azioni. Si noti che occorre inserire la diluizione in un quadro probabilistico in quanto dipende dall'andamento dell'azione dopo l'emissione del bond.

Trattamento fiscale

I convertible bonds sono delle ottime soluzioni anche da un punto di vista fiscale. Infatti, se

¹³Si veda *Appendice A*.

¹⁴Il *corporate bond* è una tipologia di obbligazione erogata da banche o società private allo scopo di finanziarsi e ottenere una maggior disponibilità di liquidità.

¹⁵Il *rischio di business* è la possibilità che una società guadagni meno rispetto agli utili previsti, o che abbia delle perdite piuttosto che dei profitti.

¹⁶La *diluizione* è la riduzione di qualsiasi indice per azione (come utili, valore contabile, etc.) dovuta ad un aumento delle azioni della società per effetto di operazioni quali: l'esercizio delle opzioni, la conversione di titoli azionari o l'esecuzione di aumenti di capitale. L'utile distribuito dalla società verrà diviso su più azioni, dunque a parità di utile totale, l'utile per azione diminuirà. Tale effetto di diluizione si ha nell'immediato, mentre nel breve-medio termine verrà riassorbito.

una società emettesse delle azioni, dovrebbe retribuire periodicamente gli azionisti con i dividendi, i quali però provengono da profitti al netto dopo le imposte. Nel caso delle obbligazioni convertibili, invece, i pagamenti degli interessi sul debito sono deducibili dalle tasse.

Agenzie di rating

Le agenzie di rating sono delle società che assegnano una valutazione riguardante la solidità e la solvibilità di una società emittente titoli sul mercato finanziario. Se una società accumula debiti nel proprio bilancio, necessariamente gli interessi passivi sul nuovo debito aumenteranno e le agenzie di rating declasseranno la sua affidabilità creditizia. Ci sono, però, nei debiti convertibili degli aspetti che possono mitigare la posizione presa dalle agenzie di rating. Ad esempio, le *azioni privilegiate convertibili*¹⁷ spesso non hanno data di scadenza, dunque, non vi è alcun impegno vincolante da parte dell'emittente nel restituire il capitale all'investitore. Inoltre, se vengono soddisfatte determinate condizioni, il pagamento dei dividendi può essere rinviato senza costituire un evento di default. Per tale motivo, queste azioni sono emesse da società che, a livello finanziario, sono più deboli.

1.2.2 Per l'investitore

I convertible bonds offrono, anche per gli investitori, numerosi vantaggi rispetto ai comuni investimenti obbligazionari o azionari.

Strumento a reddito fisso

Un convertible bond offre il meglio da ciò che si potrebbe ottenere nell'investire in azioni o in obbligazioni. Una tradizionale obbligazione convertibile, infatti, può essere considerata come uno strumento a reddito fisso: ha un valore facciale, una scadenza nella quale il valore facciale può essere ripagato oppure l'obbligazione può essere convertita in azioni e viene retribuito un regolare coupon semestrale o annuale.

Perdita limitata

Uno dei principali vantaggi delle obbligazioni convertibili consiste nel poter guadagnare limitando le perdite. Questa tipologia di bond, infatti, permette di essere parzialmente protetti dai turbamenti dei mercati e, dunque, delle azioni sottostanti al titolo.

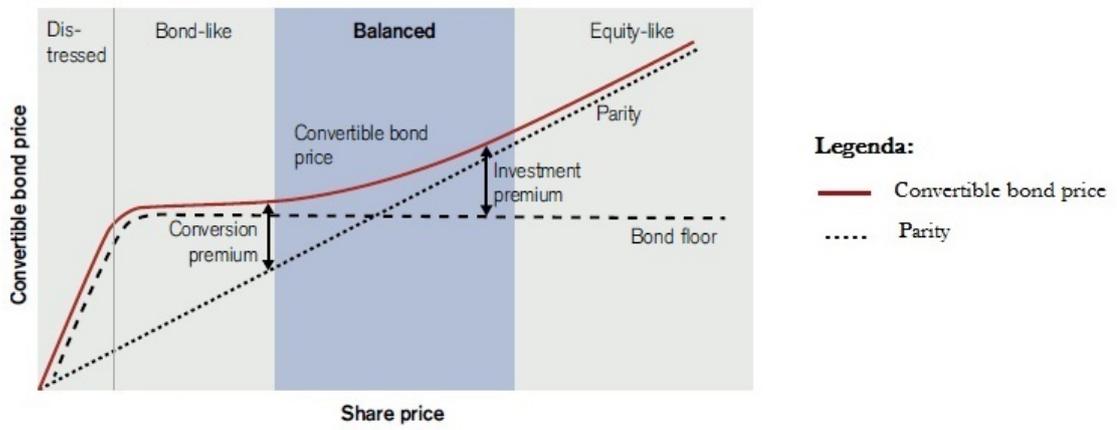
Prima di scegliere un'obbligazione convertibile, l'investitore non deve solo valutare la qualità del rischio legato all'emittente, ma anche la *sensibilità*¹⁸ dell'obbligazione, ovvero l'impatto delle variazioni del prezzo dell'azione sottostante sul prezzo dell'obbligazione, definito *delta*¹⁹. Tale funzione è illustrata nel seguente grafico.

¹⁷Le *azioni privilegiate convertibili* sono una categoria di azioni che consente ai possessori di essere privilegiati nella corresponsione dei dividendi e nell'eventuale rimborso del capitale, che offre l'opzione di convertibilità ma che non dà diritto di partecipazione alle assemblee.

¹⁸Si veda *Delta* nell'*Appendice A*.

¹⁹Si veda *Appendice A*.

1.2 Vantaggi dei convertible bonds



Vi è un valore, definito *bond floor*²⁰, al di sotto del quale l'opzione convertibile diventerebbe inutile in quanto il prezzo delle azioni sottostanti sarebbe sceso notevolmente al di sotto del valore di conversione²¹. La differenza percentuale tra il convertible bond e il bond floor è detta *investment premium*²², mentre la differenza di prezzo tra il convertible bond e la parity è definita *conversion premium*.

A seconda di come varia il prezzo delle azioni sottostanti, è possibile suddividere le obbligazioni convertibili in quattro categorie: "distressed", "bond-like" (o "out of the money"), "balanced" (o "at the money") ed "equity-like" (o "in the money").

- i) Un **convertible bond "distressed"** è scambiato nettamente al di sotto del suo valore di conversione. Il risultato è che il titolo viene valutato come normale titolo di debito in quanto ci sono poche possibilità che raggiunga mai il prezzo convertibile prima della scadenza.
- ii) Se la quotazione dell'azione sottostante è significativamente al di sotto del prezzo di conversione, il convertible bond è definito **bond-like** (o **out of the money**), ossia ha un comportamento simile ad un corporate bond. In questo caso la sensibilità è inferiore al 20%, ciò vuol dire che il prezzo dell'obbligazione convertibile non è molto sensibile al prezzo dell'azione.
- iii) Quando la quotazione dell'azione sottostante è prossima al prezzo di conversione, l'obbligazione convertibile è definita **balanced** (o **at the money**), poiché in questa zona il payoff è particolarmente asimmetrico. Qui la sensibilità è compresa tra il 20% e l'80%: più il prezzo dell'azione sottostante aumenta e diverge dal prezzo di conversione, più aumenta la sensibilità dell'obbligazione. Questo caso è particolarmente interessante per gli investitori: al rialzo permette un'alta partecipazione nella crescita dell'azione, mentre al ribasso il convertible bond partecipa meno nel calo del prezzo dell'azione.
- iv) Quando la quotazione dell'azione sottostante è significativamente al di sopra del prezzo di conversione, il convertible bond è definito **equity-like** (o **in the money**), ossia ha un comportamento simile all'azione sottostante. In questo caso la sensibilità dell'obbligazione è superiore all'80%, il che vuol dire che il prezzo dell'obbligazione convertibile è molto sensibile al prezzo dell'azione.

Si è potuto, dunque, osservare che se il prezzo dell'azione sottostante sale, anche il prezzo dell'obbligazione convertibile aumenta, ma se il prezzo dell'azione sottostante scende, il prezzo dell'obbligazione convertibile diminuisce molto meno in quanto è sostenuto dal flusso cedolare regolare e dal rimborso del capitale a scadenza. La capacità di un convertible bond di seguire il rialzo dell'azione sottostante e di limitare i ribassi quando essa scende è definita *convessità*²³ ed è misurata in termini di *gamma*²⁴. Tale capacità è il motivo più importante per cui un convertible bond è un investimento meno volatile di uno in azioni sottostanti.

²⁰Si veda *Appendice A*.

²¹Si veda *Appendice A*.

²²Si veda *Appendice A*.

²³Si veda *Gamma* nell'*Appendice A*.

²⁴Si veda *Appendice A*.

Ottimizzazione del portafoglio

La seguente tabella²⁵ illustra la simulazione di un portafoglio di investimento con quattro diverse allocazioni: la simulazione inizia con un portafoglio equamente costituito da azioni e obbligazioni, successivamente si accresce gradualmente l'allocazione nei convertible bonds (in porzioni del 10%) per ottenere infine un portafoglio composto per il 35% da azioni, per il 35% da obbligazioni e per il restante 30% da convertible bonds.

Ciò consente di confrontare la *performance*²⁶ e la volatilità di ciascun portafoglio sulla base dei dati osservati dal 2004 al 2014.

Azioni	50%	45%	40%	35%
Obbligazioni	50%	45%	40%	35%
Convertible bonds	0%	10%	20%	30%
↓				
Performance a 10 anni	65,7%	69,5%	73,4%	77,2%
Volatilità	11,5%	11,2%	11%	10,7%

Questa simulazione mostra che man mano che si aumenta l'allocazione di convertible bonds nel portafoglio, la performance aumenta e la volatilità diminuisce: dal primo portafoglio (con 0% di obbligazioni convertibili) all'ultimo (con 30% di obbligazioni convertibili) si è registrato un rendimento di oltre il 10% in termini di performance, mentre la volatilità si è ridotta di quasi un punto percentuale.

Questi risultati mostrano l'utilità dell'allocazione nelle obbligazioni convertibili dovuta al loro duplice vantaggio: la partecipazione al rialzo e la protezione al ribasso.

Un altro modo per dimostrare l'effetto positivo che si ottiene aggiungendo i convertible bonds in un portafoglio di obbligazioni ed azioni consiste nell'usare il CAMP²⁷. Da questo modello deriva uno dei fondamenti della teoria del portafoglio, la *frontiera efficiente*. Quest'ultima rappresenta l'insieme delle combinazioni di tali titoli finanziari, che offrono il più alto rendimento atteso a parità di rischio o il rischio più basso a parità di rendimento atteso.

Il seguente grafico illustra la frontiera efficiente per un portafoglio costituito da azioni ed obbligazioni (linea blu) e per uno che comprende anche convertible bonds (linea verde). Esso è stato realizzato considerando i dati sui rendimenti e rischi che riguardano il periodo che va dal gennaio 2005 al gennaio 2008, omettendo così nell'analisi la turbolenza avvenuta nel 2008. Per rappresentare i mercati azionari si è utilizzato l'indice MSCI, per rappresentare l'universo dei corporate bonds si è usato l'indice iBoxx Investment Grade mentre la performance dei convertible bonds è stata simulata utilizzando l'indice Bloomberg Covertible (BBOCONV).

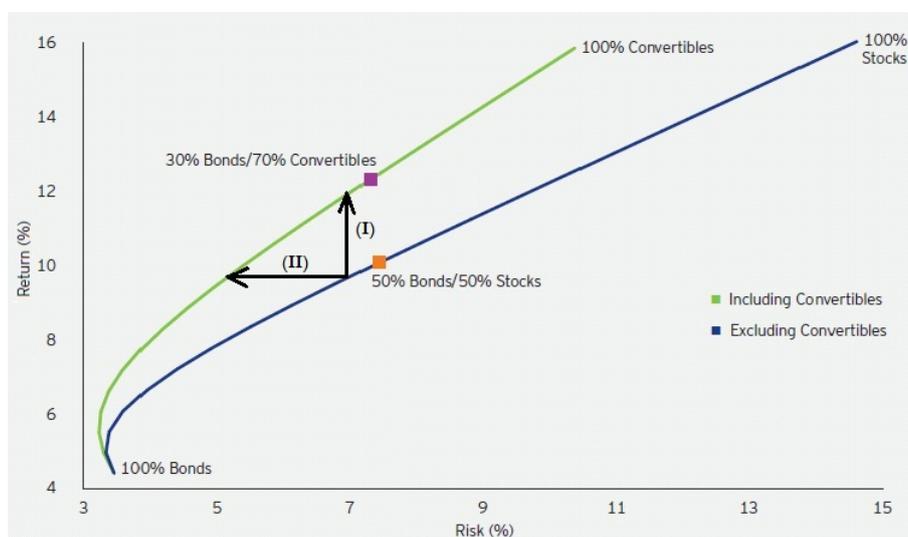
Se si considera il portafoglio costituito da azioni e obbligazioni, l'unico modo per ottenere maggior profitto è aumentare il rischio. Ma aggiungendo nel portafoglio i convertible bonds, è

²⁵Fonte: Lombard Odier (azioni: MSCI World [USD]; obbligazioni: JP Morgan Global Aggregate Bond Index [USD]; convertible bonds: UBS Global Index [USD] - dal 30.06.2004 al 30.06.2014).

²⁶La *performance* rappresenta il rendimento ottenibile da un investimento, tenendo conto sia degli utili percepiti (cedola o dividendo) sia delle variazioni del prezzo tra il momento dell'acquisto e quello della vendita.

²⁷Il CAMP (Capital Asset Pricing Model) è un modello matematico che determina la relazione tra il rendimento di un titolo e la sua rischiosità.

1.2 Vantaggi dei convertible bonds



possibile aumentare i rendimenti attesi mantenendo invariato il rischio. La figura mostra anche come cambia la frontiera efficiente in due favorevoli direzioni quando nel portafoglio vengono introdotti i convertible bonds:

- (I) a parità di rischio è possibile ottenere un maggiore rendimento atteso;
- (II) c'è una riduzione del rischio pur essendo in grado di mantenere lo stesso rendimento atteso.

Investimenti su misura

Poter definire le caratteristiche delle obbligazioni convertibili (tipologia del coupon e frequenza con cui vengono pagati, rapporto di conversione, scadenza e tutte le altre peculiarità dello strumento) permette di ottenere sempre nuove strutture di convertible bonds. Per tale motivo, questa tipologia di obbligazioni può essere considerata come un vero e proprio 'investimento su misura'. Gli investitori possono, infatti, utilizzare le obbligazioni convertibili per strategie d'investimento piuttosto diverse: strategie con alta sensibilità azionaria (tramite obbligazioni convertibili in the money), per strategie total return (tramite obbligazioni convertibili at the money), di rendimento a più basso rischio (tramite obbligazioni convertibili out of the money) o di rendimento a più alto rischio (tramite obbligazioni convertibili distressed).

Approccio da venture capitalist

L'acquirente di un convertible bond si comporta come una sorta di venture capitalist. Egli, infatti, concede un prestito all'emittente del titolo obbligazionario per un basso tasso di interesse e se il rendimento delle azioni sottostanti è positivo l'investitore converte il bond in azioni (diventando azionista della società).

1.3 Svantaggi per gli investitori

Colui che acquista un convertible bond deve tenere in considerazione, non solo i numerosi vantaggi che questo tipo di obbligazione può offrirgli, ma anche gli svantaggi che può provocare. Precisamente, se l'investitore dovesse decidere di non convertire il bond, quando il mercato sale si otterrebbe un guadagno inferiore rispetto a quello che si incasserebbe investendo in azioni e quando il mercato scende protegge meno di un'obbligazione a tasso fisso. Inoltre, è alto il rischio che il titolo sottostante perda terreno e il valore dell'opzione si annulli. In tal caso il titolare del convertible bond si ritrova tra le mani una normale obbligazione dal rendimento bassissimo.

Capitolo 2

Reverse convertible bonds

In questo capitolo si affronteranno i *reverse convertible bonds*, argomento di questa tesi. I *reverse convertible bonds* sono strumenti finanziari, generalmente a scadenza breve (mediamente di durata compresa tra i 6 mesi e i 2 anni), che conferiscono al sottoscrittore una cedola particolarmente elevata rispetto ad obbligazioni di pari durata, a fronte però del rischio di ricevere alla scadenza un numero predefinito di azioni il cui valore è inferiore all'investimento fatto. Il valore del coupon varia in base alle condizioni di conversione e alla natura delle azioni sottostanti.

A differenza di quanto accade per i convertible bonds in cui è l'investitore a scegliere se convertire o meno l'obbligazione in azioni, nei reverse convertible bonds il diritto di conversione è lasciato all'emittente e non al sottoscrittore.

Questi strumenti sono molto importanti in quanto permettono alle banche di sostenere la raccolta del risparmio e poter coprire rischi altrimenti assunti.

L'emissione dei reverse convertible bonds è avvenuta in gran parte nel 1998 quando il mercato ha assistito al primo importante aumento dei livelli di volatilità dopo il collasso di LTCM¹. In alcune giurisdizioni questa tipologia di obbligazione è stata vietata per evitare che investitori inesperti venissero rimborsati con azioni di basso valore piuttosto che con il valore nominale. Spesso gli investitori si sono lasciati ingannare dall'elevato coupon, sebbene non avessero compreso del tutto cosa in realtà stessero acquistando. Per questo motivo, i regolatori si sentirono in dovere di proteggere gli investitori che stavano affrontando il mercato gestito da professionisti.

Nonostante ciò, i reverse convertible hanno riscosso un considerevole successo tra i piccoli risparmiatori. Una delle possibili spiegazioni è riconducibile alla riduzione dei tassi di interesse sui titoli obbligazionari che si è presentata in corrispondenza con l'entrata in vigore della moneta unica europea. Ciò ha permesso ai risparmiatori di riscoprire gli investimenti azionari e di

¹Il fondo Long Term Capital Management (LTCM) era un fondo d'investimento speculativo diretto da premi Nobel, professori, ex governatori della FED (Banca Centrale degli Stati Uniti d'America) e tecnici di alto profilo fondato nel 1994 con sede nel Connecticut. Nell'estate del 1998 la Russia collassa e ciò porta gli investitori a fuggire dagli investimenti ad alto rischio per spostarsi in quelli più sicuri, come le obbligazioni tedesche e USA. Ne segue che a settembre del 1998 la perdita di LTCM è superiore al 90%. A causa della dimensione del fondo e dell'intenso utilizzo di strumenti derivati stipulati con molte controparti diverse, il contagio si diffonde e il sistema finanziario internazionale è a rischio. Al fine di evitare il peggio, interviene la FED che riduce i tassi di interesse e inonda di liquidità i mercati, per consentire alle banche coinvolte di prendere in prestito denaro a prezzi favorevoli.

cercare forme obbligazionarie alternative che potessero fornire rendimenti più elevati rispetto alle obbligazioni comuni.

2.1 Payoff

Un reverse convertible bond è un titolo obbligazionario atipico² che conferisce al suo possessore il diritto di essere rimborsato a scadenza o con il valore nominale N oppure tramite un numero C_r di azioni di valore S predefinite al momento della stipula del contratto.

Questo tipo di bond è dato dalla combinazione di un'obbligazione ordinaria (senza l'opzione di conversione) a breve termine di valore facciale N e di un'opzione put³ sulle azioni sottostanti, implicitamente venduta dal sottoscrittore all'emittente. Dunque, il possessore di un reverse convertible bond si trova nella posizione di sottoscrittore della componente obbligazionaria e venditore della componente derivata (l'opzione put). Il prezzo strike di tale opzione corrisponde al valore facciale del debito. Dato che il reverse convertible include un'opzione put, il suo prezzo è minore di un'equivalente corporate bond.

L'investitore riceve periodicamente un coupon e alla scadenza un payoff pari a:

$$\min(N, C_r \times S) \quad (2.1)$$

Riordinando i termini dell'equazione (2.1) si ottiene equivalentemente:

$$N - \max(0, N - C_r \times S) \quad (2.2)$$

Tale payoff può essere visto, pertanto, come la differenza del payoff di un'obbligazione standard e un certo numero (C_r) di opzioni put sull'azione sottostante.

Il rendimento di un reverse convertible è collegato, dunque, all'andamento delle azioni sottostanti: alla scadenza, il possessore di questo tipo di obbligazione riceve il rimborso alla pari del capitale investito solo se il prezzo delle azioni sottostanti è superiore ad un livello fissato al momento dell'emissione (prezzo strike); in caso contrario egli riceverà le azioni sottostanti in base ad un rapporto stabilito contrattualmente, o l'equivalente monetario del valore di mercato di tali azioni. E' possibile che alla scadenza vengano consegnate all'investitore azioni con un valore di mercato inferiore a quello impiegato per la sottoscrizione del reverse convertible. Tale perdita è però bilanciata tramite il guadagno ottenuto con l'elevata cedola, che funge appunto come una sorta di cuscinetto di protezione contro le eventuali perdite di conto capitale.

Le caratteristiche che contraddistinguono questo bond possono far sorgere il dubbio che questi strumenti appartengano alla categoria delle obbligazioni. Infatti, a differenza di queste, non garantiscono la restituzione del capitale investito che può ridursi in funzione dell'andamento negativo delle azioni sottostanti.

²Un reverse convertible bond è considerato un titolo atipico in quanto non è garantito il rimborso dell'intero valore nominale.

³Si veda *Appendice A*.

2.2 Emissione

Di norma l'emissione dei reverse convertible viene progettata da una banca d'affari su richiesta dell'emittente, tenendo conto delle tendenze del mercato e delle preferenze dei risparmiatori. L'emittente si limita a seguire la fase di distribuzione collocando le reverse convertible presso il pubblico, direttamente o tramite terzi. L'emissione può anche essere interamente sottoscritta da un investitore professionale, il quale provvede immediatamente a ricollocare il prestito presso il pubblico. E' possibile trasferire alla banca i rischi connessi con l'emissione del reverse convertible attraverso un'operazione di swap⁴ strutturato: l'emittente si impegna a pagare alla banca d'affari un tasso variabile di mercato, a volte ridotto di uno spread (e dunque inferiore ai tassi correnti di mercato), mentre la banca d'affari si accolla tutti i costi e i rischi derivanti dal reverse convertible (corresponsione della cedola e rimborso del capitale tramite valore nominale o azioni).

Se l'emittente è riuscito a collocare tutto il prestito, egli non è esposto ad alcun rischio di mercato nell'ambito dell'operazione, ma tutto si riduce ad una semplice raccolta di fondi a tassi di mercato, o inferiori. Se, invece, i reverse convertible rimangono in portafoglio, l'emittente è esposto allo stesso rischio del sottoscrittore dell'obbligazione, anche se limitatamente alla quota non collocata.

Viceversa, la banca d'affari è esposta a due fattori di rischio:

1. Un rischio di tasso derivante dal contratto swap stipulato con l'emittente.

Egli, infatti, paga un tasso variabile alla banca d'affari, mentre quest'ultima, tra le altre cose, si impegna a corrispondere all'emittente un tasso fisso. Ciò permette così di avere una copertura finanziaria del reverse convertible bond. L'importo viene incassato dall'emittente, ma subito girato ai risparmiatori sotto forma di pagamento della cedola. Ne consegue che la banca d'affari rimane esposta ad un rischio di ribasso dei tassi di interesse di mercato, in tal caso sarebbe comunque impegnata a corrispondere un tasso fisso che non rappresenta più le condizioni di mercato correnti.

La banca d'affari copre di solito tale rischio convertendo il tasso variabile incassato con un tasso fisso pari a quello da corrispondere all'emittente alla scadenza. Questa operazione avviene attraverso un contratto di interest rate swap⁵ con una controparte istituzionale. Il contratto non è però così bilanciato dato che la cosiddetta gamba fissa⁶, incorporando il premio dell'opzione acquistata, vale più di quella variabile. Per mantenere l'uguaglianza dei valori attuali tra la gamba fissa e quella variabile, la banca d'affari verserà alla controparte un importo pari alla differenza attualizzata tra i rendimenti dei due investimenti (*net present value*).

2. Un rischio relativo alla parte derivata del reverse convertible.

A seguito dell'operazione di swap strutturato, la banca d'affari acquista l'opzione put connessa con l'emissione del prestito. Dunque, nel caso in cui l'opzione non venga esercitata, essa perderà l'importo utilizzato per il pagamento dell'acquisto dell'opzione.

⁴Si veda *Appendice A*.

⁵Si veda *Appendice A*.

⁶Si definisce *gamba fissa* il flusso di interessi a tasso fisso, mentre quello a tasso variabile *gamba variabile*.

La banca d'affari può coprire tale rischio vendendo ad uno o più intermediari un'opzione put con le medesime caratteristiche. L'importo incassato a titolo di premio dovrebbe compensare il net present value dello swap e garantire un margine di profitto per la banca d'affari.

Se queste operazioni per ovviare ai rischi fossero fatte sull'intero ammontare del prestito, sia l'emittente che la banca d'affari sarebbero protetti, qualsiasi sia l'andamento delle azioni sottostanti e i tassi di interesse di mercato. Le uniche posizioni a rischio resterebbero: quella dell'intermediario che ha acquistato l'opzione put (anche lui in realtà può decidere se coprire a sua volta tale rischio), quella dell'intermediario che ha scambiato con la banca d'affari il tasso fisso con il tasso variabile e quella dell'acquirente del reverse convertible bond.

2.3 Strategia di copertura del rischio

Come si è appena visto, l'emittente rivende ad una banca d'affari l'opzione put acquistata dal risparmiatore. A sua volta, la banca d'affari può rivendere l'opzione ad un operatore professionale, il quale può decidere di applicare le seguenti strategie:

- 1) Eseguire una strategia di copertura che bilanci alcuni rischi connessi all'opzione put, in particolare quelli di una diminuzione del valore dell'opzione, a seguito di rialzi del prezzo dell'azione sottostante.

In questo caso, per una copertura completa dei rischi, l'investitore professionale esegue le operazioni di *Delta Neutral Hedging* (o definita banalmente *Delta Hedging*). Questa strategia consiste nell'acquistare un certo quantitativo di azioni oggetto dell'opzione put in modo che la posizione complessiva non sia influenzata dalle variazioni di prezzo delle azioni sottostanti.

Il valore teorico della put è, infatti, influenzato dai movimenti di prezzo dell'azione sottostante: la riduzione del prezzo delle azioni fa aumentare la probabilità che l'opzione possa scadere con valore, dunque chi vende l'opzione chiederà un prezzo maggiore così da compensare l'aumento del rischio di subire perdite alla scadenza, portando dunque all'aumento del valore dell'opzione; se invece il prezzo dell'azione supera il prezzo strike, le probabilità che alla scadenza il prezzo torni su tale livello si riducono, deprezzando di conseguenza l'opzione.

Così, se il prezzo delle azioni sale, l'opzione si svaluta, ma avendo acquistato una certa quantità di azioni sottostanti, l'aumento di valore di tali azioni riesce a compensare la diminuzione del valore della put. Analogo è il discorso in caso di diminuzione del prezzo delle azioni sottostanti.

La quantità di azioni da acquistare dipende principalmente dal tempo che rimane alla scadenza, dal prezzo strike e dal prezzo corrente dell'azione sottostante.

Questa strategia permette, dunque, all'investitore professionale di coprirsi dai rischi restringendo il prezzo delle azioni sottostanti attorno al livello del prezzo strike dell'opzione (tale fenomeno è definito **effetto calamita**).

- 2) Mantenere l'opzione senza copertura, rimanendo esposto all'effetto delle variazioni di prezzo delle azioni sottostanti. In tal caso, l'investitore professionale, possessore dell'opzione connessa ad un reverse convertible bond, rischia che vi sia un'alta probabilità che l'opzione scada senza valore. Come conseguenza, è possibile che il possessore di tale opzione decida di mettere in atto delle compravendite sull'azione sottostante, così da mantenere elevato il valore dell'opzione, o di esercitarla alla scadenza con un guadagno.
- 3) Eseguire una strategia combinata attraverso la copertura di una parte del portafoglio, rimanendo, però, in parte esposto al rischio connesso con le variazioni di prezzo delle azioni sottostanti.
Tale esecuzione implica entrambi gli effetti descritti per le due strategie precedenti, sebbene in questo caso si potrebbero manifestare con intensità minore.

A seconda di quale sia il sottostante, i reverse convertible assumono una diversa forma e denominazione. In seguito si analizzano i principali esempi.

2.4 Reverse convertible knock-in

Questa è la più nota e diffusa variante della reverse convertible tradizionale, tanto che viene definita *reverse convertible di seconda generazione*.

Si tratta di un reverse convertible bond a cui viene associata un'opzione put di tipo barriera (*knock-in*⁷).

Le knock-in associate a questa tipologia di obbligazioni convertibili appartengono al tipo 'down and in' ovvero iniziano ad esistere non appena il prezzo del sottostante tocca la barriera al ribasso. In questo caso il sottoscrittore possiede un titolo meno rischioso e dunque meno remunerato rispetto ad un reverse convertible di tipo tradizionale.

Per tale motivo, il rimborso mediante consegna di azioni sottostanti avviene al verificarsi di due condizioni:

- 1) alla scadenza il prezzo delle azioni sottostanti deve essere inferiore al prezzo strike;
- 2) superamento al ribasso di un determinato livello di prezzo (knock-in), almeno una volta nel corso della vita dell'obbligazione.⁸

Dunque, se le due condizioni vengono soddisfatte, l'investitore riceverà la maxi cedola e, invece del capitale investito, entrerà in possesso della quantità prevista dal contratto di azioni sottostanti pagandole al prezzo di esercizio, ossia pari al rapporto tra l'investimento e il prezzo strike.

Se, al contrario, le due condizioni non si verificano, l'emittente deve restituire il capitale investito integralmente.

⁷Si veda *Appendice B*.

⁸Esistono contratti più complessi che prevedono che il superamento della soglia avvenga in finestre temporali prefissate.

Si ricorda inoltre che la barriera è inferiore al prezzo strike, pertanto la rottura della barriera determina che l'opzione risulta già 'in the money' e quindi incrementa la probabilità che il risparmiatore riceva alla scadenza le azioni o il differenziale al posto del valore facciale.

Se, ad esempio, si ha un knock-in pari al 70% significa che a scadenza il suo possessore riceverà azioni, anziché il rimborso del capitale, se il prezzo dell'azione fosse non solo inferiore al prezzo strike, ma che sia stato almeno una volta nel corso della vita dell'obbligazione uguale o inferiore al 70% dello strike.

2.5 Reverse convertible knock-out

Questa tipologia di obbligazioni è un reverse convertible a cui viene associata un'opzione put di tipo barriera (*knock-out*⁹).

Le knock-out associate ai reverse convertible appartengono al tipo 'up and out' ovvero cessano di esistere se il prezzo dell'azione sottostante raggiunge una determinata soglia al rialzo (la barriera dunque si trova al di sopra del prezzo strike). Per il momento non sono stati emessi reverse convertible bonds a cui è stata associata un'opzione di tipo barriera con struttura 'down and out', ovvero in cui l'opzione cessa di esistere se il prezzo delle azioni sottostanti raggiunge la barriera al ribasso.

I reverse convertible knock-out, rispetto a quelli tradizionali, risultano meno rischiosi per l'acquirente e di conseguenza hanno un valore inferiore. Infatti, poiché il prezzo che l'investitore incassa dalla vendita dell'opzione è incorporato nella maxi cedola, il tasso d'interesse corrisposto dai reverse di tipo knock-out è inferiore rispetto a quello corrisposto dai reverse tradizionali.

2.6 Reverse convertible one touch

I reverse convertible one touch sono obbligazioni molto simili ai knock-in, in quanto anche in questo caso, l'opzione ad esso associata inizia ad esistere qualora il prezzo dell'azione sottostante scenda sotto un livello stabilito al momento dell'emissione.

La differenza si nota alla scadenza, in quanto per le one touch, non è necessario che si avveri la seconda condizione, ovvero che il prezzo del sottostante risulti inferiore al prezzo strike. In questo caso è infatti sufficiente che si avveri la prima condizione, ossia che la barriera venga toccata almeno una volta (one touch).

Le one touch potrebbero risultare leggermente più rischiose delle knock-in, in quanto per le prime chi acquista l'opzione (l'intermediario o la banca d'affari) potrebbe esercitarla anche se in teoria non dovesse convenire (il valore intrinseco dell'opzione è negativo) dato che vi è la possibilità che per l'esercizio si debbano sostenere delle spese minori rispetto ad una vendita dei titoli sul mercato.

⁹Si veda *Appendice B*.

2.7 Reverse convertible di terza generazione (Linked)

Le reverse convertible di terza generazione, apparse solo recentemente sul mercato, uniscono alla struttura standard (eventualmente dotata di un'opzione di tipo knock-in) l'acquisto di un'opzione call. Tale modifica permette di sfruttare le aspettative di rialzo dell'azione sottostante.

Solitamente alla scadenza, se il valore dell'azione è superiore allo strike della call acquistata, il sottoscrittore riceve una percentuale della differenza tra il prezzo corrente dell'azione sottostante e il prezzo strike.

La struttura di questo tipo di obbligazioni risulta essere più favorevole rispetto a quella dei reverse convertible standard e di conseguenza il rendimento cedolare sarà più basso.

2.8 Conclusioni

Come si è potuto vedere dalla descrizione delle caratteristiche di un reverse convertible bond, chi acquista uno strumento di questo tipo, il massimo guadagno lo può ricavare se il valore dell'azione sottostante non cala al di sotto del prezzo strike.

Se al momento della sottoscrizione il valore dell'azione sottostante è all'incirca uguale a quello di riferimento, chi acquista la reverse convertible potrebbe erroneamente pensare che il prezzo dell'azione rimanga pressoché stabile o subisca delle piccole variazioni.

Per tale motivo, chi ha aspettative di forte rialzo dell'azione sottostante può avere maggior interesse ad acquistare direttamente le azioni perché il profitto derivante dall'acquisto di un reverse convertible non può in alcun caso eccedere la cedola, il cui valore è prefissato.

Investire in questa tipologia di obbligazioni convertibili è abbastanza rischioso in quanto può comportare la perdita di tutto il capitale investito (ad eccezione della cedola che viene comunque pagata).

Si è inoltre visto che un investimento in reverse convertible equivale all'acquisto di un'obbligazione e alla vendita di un'opzione put all'emittente, il cui premio è incassato sotto forma di un coupon molto alto. Il valore di un reverse convertible, pertanto, può diminuire o a seguito della diminuzione del valore della componente obbligazionaria oppure per un incremento del valore della put.

Il valore di un'obbligazione a tasso fisso si riduce in conseguenza di rialzi dei tassi di interesse. Il valore della put, invece, aumenta al ridursi del prezzo dell'azione sottostante.

Capitolo 3

La valutazione dei reverse convertible bonds

Come visto nel capitolo 2, i reverse convertible bonds sono obbligazioni che conferiscono all'emittente il diritto di scegliere come risarcire alla scadenza (dato che in questa tesi si stanno considerando contratti di tipo Europeo) l'investitore, o con il valore nominale oppure consegnandogli un numero predefinito di azioni (che possono essere della stessa società che ha emesso l'obbligazione oppure di una società diversa).

Pertanto, i reverse convertible bonds possono essere considerati come il risultato ottenuto dalla combinazione di un coupon-bond ordinario e di un'opzione put. Per tale motivo, il calcolo del prezzo di questa tipologia di obbligazione considera tre componenti:

- (I) la prima componente è il valore di un coupon-bond ordinario emesso dalla stessa società, senza l'opzione per l'emittente di rimborsare il debito obbligazionario con la consegna di azioni;
- (II) la seconda componente è data dal rapporto di conversione C_r , ossia dal numero di azioni che si ottengono dalla conversione di ciascuna obbligazione convertibile;
- (III) la terza componente è il valore dell'opzione put incorporata.

Il premio dell'opzione put, moltiplicato per il rapporto di conversione, si riflette sul prezzo del reverse convertible bond riducendo il valore del bond ordinario con il valore dell'opzione put nel seguente modo:

$$\text{Prezzo (reverse convertible bond)} = \underbrace{\text{Prezzo (coupon-bond ordinario)}}_{(I)} - \underbrace{C_r}_{(II)} \underbrace{\text{Prezzo (opzione put)}}_{(III)}$$

Si analizzano nel dettaglio le componenti (I) e (III).

3.1 Valutazione di un coupon-bond ordinario

Il prezzo di un'obbligazione, definito *prezzo tel-quel*, è pari al valore attuale dei flussi di cassa futuri del titolo. Per i bond che prevedono il pagamento delle cedole, i flussi di cassa sono i coupon e il prezzo di rimborso (valore nominale, che può essere uguale o superiore al prezzo pagato per l'obbligazione). Tali pagamenti devono essere scontati ricorrendo ad un tasso di sconto pari al tasso d'interesse di mercato.

Pertanto, il prezzo di un coupon bond ordinario si calcola mediante la seguente equazione:

$$P = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{c}{(1+r_t)^t} + \frac{c+N}{(1+r_T)^T}$$

dove

t: istante in cui viene pagato il coupon;

c: valore del coupon (in questa tesi si considerano cedole fisse, non variabili);

T: data di scadenza;

r_1, \dots, r_T : tassi di interesse di mercato;

N: valore nominale del bond;

$((1+r_t)^t)_{t=1, \dots, T}$: *fattore di attualizzazione*.

Come si può notare, vi è una relazione inversa tra il prezzo del bond e il tasso di sconto: se il tasso sale il prezzo si abbassa, viceversa, se cala il valore del bond aumenta.

Da tale equazione si osserva, inoltre, che il prezzo di un'obbligazione dipende da tre variabili: il rendimento della cedola, il tasso d'interesse di mercato e la durata del titolo.

Tuttavia, esiste un altro fattore che, seppur non presente in modo esplicito all'interno della formula, influenza il prezzo dei bonds: il rating, che esprime il giudizio circa la capacità dell'azienda di essere solvibile nel tempo. Coloro che si occupano di attribuire questo tipo di giudizio sono le *agenzie di rating*, tra le più note ed influenti si ricorda Moody's o Standard Poor's. Esse, basandosi su una scala di giudizio che varia da società a società, giudicano la solvibilità dell'azienda e quindi la sua capacità a rimborsare i debiti contratti. Se però un'obbligazione presenta un rating AAA (il più alto della scala Moody's) non significa che è sicura, bensì che la probabilità di insolvenza della società emittente è molto bassa.

Il tasso di interesse che si considera nella valutazione del bond varia in base alla tipologia dell'obbligazione: se il bond è privo di rischio di credito¹ (come per esempio sono i Buoni Ordinari del Tesoro - BOT - nel sistema finanziario italiano) si considera un tasso di interesse risk free, altrimenti, nel caso in cui il bond sia esposto a rischio di credito (come ad esempio sono i convertible bonds e i reverse convertible bonds) il tasso di interesse si ottiene sommando al tasso risk free il credit spread che rappresenta il premio che riceve l'acquirente dell'obbligazione per i rischi che corre nell'investire in tale titolo. Nel seguito si approfondisce quest'ultimo caso, ossia la valutazione di un coupon-bond ordinario con rischio di credito.

Coupon-bond ordinario con rischio di credito

¹Il *rischio di credito* è il rischio che il debitore non sia in grado di adempiere ai suoi obblighi di pagamento di interessi e di rimborso del capitale.

3.1 Valutazione di un coupon-bond ordinario

Si vuole affrontare la valutazione di un'obbligazione con rischio di default tramite il metodo delle PDE definito da Black-Scholes.

Si consideri un bond emesso da una società con rischio di default diverso da zero e con scadenza T . Sia S_t il prezzo al tempo t dell'azione sottostante e si assume che²

$$dS_t = \mu_S S_t dt + \sigma_{\sigma_S} S_t dW_t \quad (3.2)$$

dove W_t è un processo di Wiener³, μ_S è il tasso di rendimento atteso (*drift* - costante reale) e σ_S è la volatilità dell'azione (costante positiva). Pertanto, la distribuzione dei possibili prezzi azionari al fine di ogni intervallo finito è di tipo log-normale e la varianza istantanea dei rendimenti azionari è costante.

Solitamente, $\mu = r$ ed il tasso di interesse è risk-free.

Si suppone, inoltre, che paghi un dividendo proporzionale pari a q .

Sia $f(S, t)$, $0 \leq t \leq T$, il valore del bond rischioso. La teoria di Black-Scholes mostra che $f(S, t)$ è soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(f) = 0, & 0 \leq t < T \\ f(S, T) = g(S) \end{cases} \quad (3.3)$$

dove \mathcal{L} è l'operatore di Black-Scholes definito nel modo seguente

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r$$

²L'equazione

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t$$

la cui incognita sia costituita dal processo (X_t) è detta *equazione differenziale stocastica di Ito*. Un processo che ne sia soluzione è detto *processo di Ito* ed è della forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s \quad (3.1)$$

dove X_0 è una variabile aleatoria \mathcal{F}_0 -misurabile e $f(s, X_t), g(s, X_t) \in \mathbb{L}_{loc}^2$ (\Leftrightarrow u adattato, $\int_0^T f(s, X_t)^2 dt < +\infty$ quasi sicuramente) sono definiti *coefficienti del drift e di diffusione*.

³Un *processo di Wiener* (o *moto browniano standard*) è un processo stocastico $(W_t)_{t \geq 0}$ definito su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t))$ che gode delle seguenti proprietà:

1. $W_0 = 0$;
2. W è adattato ad (\mathcal{F}_t) e continuo (ossia W_t è \mathcal{F}_t -misurabile, $\forall t \geq 0$ e le traiettorie del moto sono funzioni continue);
3. $\forall t, h \geq 0$, $W_{t+h} - W_t \sim \mathcal{N}_{0,h}$ ed è indipendente da \mathcal{F}_t .

Come conseguenze di tali proprietà si ha che:

$$\begin{aligned} E[W_t] &= 0, \quad \forall t; \\ Var[W_t] &= E[(W_t - W_0)^2] = E[W_t^2] = t. \end{aligned}$$

Dunque, il moto browniano descrive il moto casuale di una particella in cui in ogni istante la sua posizione attesa è quella iniziale e la distanza media del suo spostamento è pari alla \sqrt{t} .

Si assume, inoltre, che la probabilità che la società emittente fallisca nel periodo di tempo che va da t a $t+dt$, a patto ovviamente che non vi sia default prima del tempo t , sia di pdt , con p tasso di rischio deterministico.

Si denota con $R \in [0, 1]$ il recovery rate in caso di default, dunque, successivamente a tale evento, il valore del bond è Rf , mentre una parte $(1 - R)$ viene persa.

Considerando la formula di Itô (3.2) e l'operazione standard di *copertura* (o *hedging*)⁴ si ottiene l'equazione alle derivate parziali $\mathcal{L}(f) = 0$, dove

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + (r + p - q)S \frac{\partial}{\partial S} - r - p(1 - R) \quad (3.4)$$

Più precisamente, per ottenere tale PDE si è considerato un portafoglio $\Pi = f(S, t) - \Delta S$ e si è calcolata la dinamica del portafoglio $d\Pi$ con la formula di Itô:

$$\begin{aligned} d\Pi &= df(S, t) - \Delta dS \\ &= (1 - pdt) \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right] dt + pdt [Rf - (f - \Delta S)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ponendo $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$, così da avere un portafoglio privo di rischio, e trascurando $(dt)^2$ si ha:

$$d\Pi \simeq \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + p \left((R - 1)f + S \frac{\partial f}{\partial S} \right) \right] dt$$

Infine, dato che si escludono le opportunità di arbitraggio, si nota che

$$E[d\Pi] = r\Pi dt$$

Si ottiene, così, la PDE (3.4).

L'ammontare

$$\rho = r + \underbrace{p(1 - R)}_s = r + s$$

è il tasso di interesse aggiustato in base al rischio di credito, in cui

r : tasso di interesse risk-free;

s : premio al rischio dovuto all'investitore per l'eventualità che l'emittente fallisca.

La seconda condizione del problema (3.3) è della forma $f(S, T) = F$, dove F rappresenta il valore facciale del bond o, più in generale, il valore facciale incrementato dal valore dei tassi

⁴Un'operazione di *copertura* (o *hedging*) consiste nell'acquisto o vendita di uno o più contratti derivati il cui valore dipende dalla medesima fonte di rischio che influenza il valore della posizione da coprire, oppure da una fonte di rischio ad essa correlata, al fine di ridurre o annullare il rischio derivante da una posizione aperta.

di interesse maturati pagati. Il prezzo di uno straight bond⁵ può essere ottenuto risolvendo un problema di Cauchy composto dalla condizione (3.4) e da una condizione finale. Se, ad esempio, si considera un zero-coupon bond con valore facciale F , la soluzione di questo problema di Cauchy non dipenderebbe da S e sarebbe definita nel modo seguente:

$$f(S, T) = Fe^{-(r+s)(T-t)}$$

Se, invece, si considera un bond che paga cedole c_j al tempo t_j , $j = 1, \dots, N$, lavorando a ritroso, il valore del bond al tempo t_{N-1} è

$$f_{N-1} = (F + c_N)e^{-(r+s)(t_N - t_{N-1})}$$

al tempo t_{N-2}

$$\begin{aligned} f_{N-2} &= (f_{N-1} + c_{N-1})e^{-(r+s)(t_{N-1} - t_{N-2})} \\ &= (F + c_N)e^{-(r+s)(t_N - t_{N-2})} + c_{N-1}e^{-(r+s)(t_{N-1} - t_{N-2})} \end{aligned}$$

al tempo 0 assume, invece, il seguente valore

$$f_0 = \sum_{j=1}^N c_j e^{-(r+s)t_j} + Fe^{-(r+s)t_N}$$

Dunque, un bond rischioso può essere valutato come un bond privo di rischio in cui il tasso di interesse risk-free (r) viene sostituito con un tasso di interesse che tiene in considerazione il premio al rischio ($\rho = r + s$).

La PDE (3.4) può essere usata per valutare anche strumenti finanziari più complicati, in cui la dipendenza da S è esplicita e la soluzione non è semplice da calcolare.

3.2 Valutazione dell'opzione put

Il prezzo di non arbitraggio delle opzioni fu determinato per la prima volta da Black e Scholes (1973) con un approccio analitico a tempo continuo. Una semplificazione è stata sviluppata da Cox, Ross e Rubinstein (1979) sviluppando un'idea di William Sharpe, nota come approccio binomiale o metodo degli alberi.

In questa tesi si affronta la valutazione dell'opzione put introdotta da Black e Scholes. Tale modello è stato poi generalizzato sotto vari punti di vista da Merton (1973), Black (1976), Roll (1977) e molti altri e viene spesso indicato come modello di Black, Scholes e Merton per il contributo di quest'ultimo alla comprensione e generalizzazione del risultato.

Oltre alle usuali ipotesi di mercati perfetti:

1. trasparenza del mercato con la possibilità per tutti di accedere alle medesime informazioni sui titoli senza dover sostenere alcun costo;

⁵Uno *straight bond* è un'obbligazione che non prevede un rimborso anticipato ma in cui l'investitore viene ripagato in una data prefissata.

2. impossibilità del singolo operatore di influenzare i prezzi sul mercato finanziario;
3. razionalità dell'investitore per cui le scelte sono sempre orientate alla massimizzazione della ricchezza e alla minimizzazione del relativo rischio;
4. assenza di arbitraggi, non è possibile dunque conseguire un profitto a costo 0;
5. omogeneità nelle attese degli investitori circa i rendimenti attesi dei titoli;
6. assenza di costi di transazione, imposte, dissesto e fallimento;
7. possibilità di dividere all'infinito le attività finanziarie, nel senso che non vi è un taglio minimo per ciascun titolo;
8. concessione della vendita allo scoperto;

si assume che:

9. il sottostante sia un titolo elementare senza dividendi, il cui prezzo sia descritto da un moto browniano geometrico definito precedentemente nell'equazione (3.2);
10. esista un titolo istantaneamente risk-free che cresce al tasso costante r :

$$dB_t = rB_t dt$$

Si vuole determinare il prezzo della put europea con scadenza T e prezzo strike K (noto e costante nel tempo), che vale a scadenza (payoff):

$$\text{Put}(T, S_T, K) = \max(0, K - S_T)$$

Si tratta dunque di determinare:

$$\text{Put}(t, S_t, K) = V_t(\max(0, K - S_T))$$

dunque, il valore dell'opzione dipende solo dal prezzo dell'azione e dal tempo, nonché da altre variabili, che però sono assunte costanti nell'analisi. E' possibile arrivare alla soluzione in due modi diversi:

- I) utilizzando il *metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE*, strada più lunga ma economicamente più chiara;
- II) applicando il *metodo del valor medio equivalente*, che rappresenta una strada certamente più corta seppur più sofisticata e probabilistica.

In questa tesi si illustrerà il primo di questi metodi.

Metodo del portafoglio di arbitraggio o della PDE.

Poiché il prezzo azionario segue il processo geometrico (3.2), si può ricorrere al lemma di Itô⁶ e poter così ricavare un'espressione che vincola la dinamica del prezzo dell'opzione put, P , (**vincolo stocastico**) senza, tuttavia, identificarla completamente:

$$\begin{aligned} dP_t &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} (dS)^2 \\ &\equiv \mu_P P_t dt + \sigma_P P_t dW_t \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mu_P P_t \equiv \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial S} \mu_S S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} \sigma_S^2 S_t^2 \quad (3.7)$$

$$\sigma_P P_t \equiv \frac{\partial P}{\partial S} \sigma_S S_t \quad (3.8)$$

Dato che si escludono le opportunità di arbitraggio, si crea un vincolo ulteriore (**vincolo economico**).

Tramite una procedura di delta hedging, si costruisce un portafoglio coperto con Δ azioni in posizione lunga⁷ e un'opzione put in posizione lunga, in modo tale che, in equilibrio, il suo rendimento sia esattamente uguale al rendimento di un'attività senza rischio. La copertura perfetta, a seguito di una variazione del prezzo azionario, è mantenuta modificando con continuità l'ammontare di put in portafoglio:

$$\Pi_t = \Delta S_t - P_t \quad (3.9)$$

La dinamica del portafoglio è definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \Delta dS - dP \\ &= \Delta dS - \frac{\partial P}{\partial t} dt - \frac{\partial P}{\partial S} dS - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} (dS)^2 \\ &= \left(\Delta - \frac{\partial P}{\partial S} \right) \sigma_S S_t dW_t + \left(\Delta - \frac{\partial P}{\partial S} \right) \mu_S S_t dt - \frac{\partial P}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} (dS)^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

e ponendo

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} \quad (3.11)$$

⁶**Lemma di Itô**

Sia $X = X_t$ un processo di Itô, ossia soddisfacente l'equazione

$$dX_t = a(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t$$

e sia $F(x, t)$ una funzione continua con derivate seconde parziali continue, allora $Y_t = F(X_t, t)$ è ancora un processo di Itô ed è soluzione della SDE:

$$\begin{aligned} dF(X_t, t) &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dX_t)^2 \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} a(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} g^2(X_t, t) \right) dt + \left(\frac{\partial F}{\partial x} g(X_t, t) \right) dW_t \end{aligned}$$

⁷La *posizione lunga* è la posizione in cui si trova l'acquirente di uno strumento finanziario.

il portafoglio diventa privo di rischio e, per non arbitraggio, identico al titolo risk-free per cui:

$$\begin{aligned}
 d\Pi &= -\frac{\partial P}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}(dS)^2 \\
 &= r\Pi dt \\
 &= r\left(\frac{\partial P}{\partial S}S_t - P_t\right)dt
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dunque, la variazione di un portafoglio privo di rischio ha rendimento pari a rdt . Eguagliando le due espressioni del drift si ha la PDE di tipo parabolico (**vincolo economico-stocastico**):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma_S^2 S_t^2 + r\frac{\partial P}{\partial S}S_t + \frac{\partial P}{\partial t} - rP_t = 0 \tag{3.13}$$

Si noti che dalle equazioni (3.10) e (3.12) si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial S}S_t\mu_S - P_t\mu_P &= r\left(\frac{\partial P}{\partial S}S_t - P_t\right) \\
 \frac{\partial P}{\partial S}S_t(\mu_S - r) &= P_t(\mu_P - r) \\
 P_t\frac{\sigma_P}{\sigma_S}(\mu_S - r) &= P_t(\mu_P - r)
 \end{aligned}$$

in condizioni di non arbitraggio si ha dunque l'uguaglianza degli indici di Sharpe⁸ nel continuo:

$$\frac{\mu_S - r}{\sigma_S} = \frac{\mu_P - r}{\sigma_P} = \phi \implies \begin{cases} \mu_S = r + \phi\sigma_S \\ \mu_P = r + \phi\sigma_P \end{cases}$$

ossia il tasso atteso di rendimento di ogni titolo è pari al tasso privo di rischio più un premio al rischio proporzionale alla volatilità istantanea del titolo stesso.

Il valore ϕ è definito *prezzo di mercato del rischio*.

Un altro aspetto da osservare è che, nel mondo risk-neutral anche i derivati hanno tasso di rendimento atteso pari al risk-free.

Infatti, da (3.6) e dalla PDE (3.13) si ottiene che, quando $\mu_S = r$, anche $\mu_P = r$.

Pertanto, si ricava il seguente problema PDE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\sigma_S^2 S_t^2 + r\frac{\partial P}{\partial S}S_t + \frac{\partial P}{\partial t} - rP_t = 0 \\ dS_t = rS_t dt + \sigma_S S_t d\hat{W}_t \\ P_T = \max(0, K - S_T) \end{array} \right. \tag{3.14}$$

dove

⁸L'*indice di Sharpe* (dal nome dell'economista che ha introdotto tale misura) è un indicatore che misura il rendimento di un portafoglio per unità di rischio complessivo.

$$d\hat{W}_t \equiv \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} dt + dW_t \equiv \phi dt + dW_t \quad (3.15)$$

Per il teorema di Girsanov⁹, \hat{W} è un moto browniano sotto un'opportuna misura di probabilità P^B , equivalente a quella neutrale.

La soluzione dell'equazione differenziale di tale sistema, che rispetta le condizioni alla scadenza (ultima equazione del sistema), dà la formula di valutazione dell'opzione put.

Si noti che la PDE del sistema (3.14) vale per qualunque derivato o portafoglio $\Pi(t, S_t)$ dipendente da S_t . Ciò che cambia, in base al derivato considerato, è la condizione terminale $\Pi(T)$.

Per il teorema di Feynman-Kac¹⁰, la soluzione della PDE del sistema (3.14) è la seguente:

$$\begin{aligned} Put(t, S_t, K) &= \hat{E}_t \left(\max(0, K - S_T) e^{-\int_t^T r du} \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \hat{E}_t(\max(0, K - S_T)) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{+\infty} (K - S_T) \hat{f}_S dS \end{aligned} \quad (3.18)$$

⁹**Teorema di Girsanov**

Dato uno spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ e dato ϕ_t un processo stocastico di Itô che soddisfa la condizione di Novikov $E \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^T |\phi_s|^2 ds} \right) < \infty$ si ha che:

- a) il processo $M_t \equiv e^{-\frac{1}{2} \int_0^t |\phi_s|^2 ds - \int_0^t \phi_s dW_s}$ è una martingala con $E(M_T) = 1$;
- b) la misura \hat{P} , definita dalla derivata di Radon-Nikodym $\frac{d\hat{P}}{dP} \equiv M_t$, è equivalente a P ;
- c) il processo \hat{Z}_t definito da

$$\hat{Z}_t \equiv Z_t + \int_0^t \phi_s ds$$

soluzione della SDE

$$d\hat{Z}_t \equiv dZ_t + \phi_t dt$$

è un moto browniano rispetto alla misura \hat{P} .

¹⁰**Teorema di Feynman-Kac** L'equazione alle derivate parziali lineare parabolica (PDE) della funzione $V(X_t, t)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g^2(X_t, t) + \frac{\partial V}{\partial x} a(X_t, t) + \frac{\partial V}{\partial t} - R(X_t, t)V + D(X_t, t) = 0 \\ V(X_T, T) = \Phi(T) \end{cases} \quad (3.16)$$

dove X_t è un processo stocastico descritto dall'equazione differenziale stocastica (SDE)

$$dX_t = a(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t$$

ha soluzione rappresentata dal valor medio:

$$V(X_t, t) = E_t \left(\Phi(T) e^{-\int_t^T R(X_s, s) ds} + \int_t^T D(X_s, s) e^{-\int_t^s R(X_u, u) du} ds \right) \quad (3.17)$$

Viceversa, la soluzione (3.17) soddisfa il problema PDE (3.16).

dove il valor medio \hat{E}_t è calcolato rispetto alla distribuzione di probabilità rappresentata dalla dinamica risk-adjusted o risk-neutral:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_S S_t d\hat{W}_t \quad (3.19)$$

La condizione di non arbitraggio ha consentito di trasformare il generico operatore valore attuale $V_t(\cdot)$ in un valor medio ben preciso $\hat{E}_t(\cdot)$ da scontare al tasso privo di rischio.

In termini della misura neutrale, la valorizzazione richiede la conoscenza di μ_S ovvero del prezzo del rischio ϕ e risulta essere definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} Put(t, S_t, K) &= e^{-r(T-t)} \hat{E}_t(\max(0, K - S_T)) \\ &= e^{-r(T-t)} E_t \left(\max(0, K - S_T) e^{-\int_t^T \phi(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \phi^2(s) ds} \right) \end{aligned}$$

Dalla dinamica (3.19) è noto che S_t è log-normale (rispetto alla misura risk-neutral), in funzione di r e del parametro di volatilità σ_S e quindi $\ln(S_T) = y(T)$ ha distribuzione condizionata:

$$\ln(S_T) | S_t \sim N \left(\ln(S_t) + (r + \frac{1}{2}\sigma_S^2)(T-t), \sigma_S^2(T-t) \right)$$

Utilizzando le usuali regole degli integrali, il valor medio può essere riscritto:

$$\begin{aligned} \hat{E}_t(\max(0, S_T - K)) &= \int_K^{+\infty} (K - S_T) \hat{f}_S dS \\ &= \int_{\ln K}^{+\infty} (K - e^{y(T)}) \hat{f}_y dy \\ &= K \int_{\ln K}^{+\infty} \hat{f}_y dy - \int_{\ln K}^{+\infty} e^{y(T)} \hat{f}_y dy \\ &= K e^{-r(T-t)} \hat{E}[\chi_{S_T < K}] - e^{-r(T-t)} \hat{E}[S_T \chi_{S_T < K}] \\ &= K e^{-r(T-t)} Pr(S_T < K) - e^{-r(T-t)} \hat{E}[S_T \chi_{S_T < K}] \end{aligned} \quad (3.20)$$

in cui il primo termine, in base alle proprietà del moto browniano geometrico:

$$Pr(S_T < K) = Pr \left(\frac{W_T - W_t}{\sqrt{T-t}} < -\frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) = N(-d_2)$$

il secondo termine:

$$e^{-r(T-t)} \hat{E}[S_T \chi_{S_T < K}] = e^{-r(T-t)} \hat{E}[S_T | S_T < K] = S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \hat{E}[e^{\sigma(W_T - W_t)} | S_T < K]$$

ponendo $Z_T = W_T - W_t \sim N(0, T-t)$

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} \hat{E}[S_T \chi_{S_T < K}] &= S_t e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{\sigma Z_T} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Z_T}{\sqrt{T-t}} \right)^2} dZ_T \\ &= S_t e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{(Z_T - \sigma\sqrt{T-t})^2}{2(T-t)}} dZ_T \end{aligned}$$

3.2 Valutazione dell'opzione put

ponendo $X_T = Z_T - \sigma\sqrt{T-t} \sim N(0, T-t)$, $dX_T = dZ_T$, si ha

$$e^{-r(T-t)} \hat{E}[S_T \chi_{S_T < K}] = S_t \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_T^2}{T-t}} dX_T = S_t N(-d_1)$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \hat{E}_t(\max(0, S_T - K)) &= K e^{-r(T-t)} P_r(S_T < K) - e^{-r(T-t)} \hat{E}[S_T \chi_{S_T < K}] \\ &= K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}} \quad (3.22)$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma_S \sqrt{T-t} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{N}(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2}} \quad (3.24)$$

e $\mathcal{N}(x) = 1 - \mathcal{N}(-x)$ è la probabilità di estrarre un numero $\leq x$ da una distribuzione normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

Pertanto il valore di un'opzione put europea:

$$P(t, S_t, K) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1) \quad (3.25)$$

Dunque, riassumendo, il prezzo di un reverse convertible bond è definito nel modo seguente:

$$P = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{c}{(1+r_t)^t} + \frac{c+N}{(1+r_T)^T} - C_r \left(K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) + S_t \mathcal{N}(-d_1) \right) \quad (3.26)$$

dove

t: istante in cui viene pagato il coupon;

c: valore del coupon;

T: data di scadenza;

r_1, \dots, r_T : tassi di interesse;

N: valore nominale del bond;

C_r : rapporto di conversione;

K: prezzo strike;

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}};$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma_S \sqrt{T-t};$$

$\mathcal{N}(\cdot)$: distribuzione normale standard.

Capitolo 4

Analisi empirica dei prezzi dei reverse convertible bonds

Nel seguente capitolo, si è svolta un'analisi empirica per determinare il valore di alcuni reverse convertible bonds attualmente attivi.

I dati sono stati presi dal database finanziario e macroeconomico, Thomson Reuters Datastream.

Fra i reverse convertible bonds presenti nel database si è ristretto il campo applicando i seguenti filtri:

- i. plain vanilla fixed coupon (omettendo variable coupon, floating coupon, discount/zero coupon e resettable coupon);
- ii. frequenza del coupon mensile, trimestrale, semestrale e annuale (omettendo obbligazioni che pagano cedole solo a scadenza);
- iii. active, ossia obbligazioni ancora attive;
- iv. no callable bonds¹;
- v. no puttable bonds²;
- vi. no basket, dunque si sono escluse le obbligazioni che in caso di conversione sarebbero state convertite in un basket di azioni.

Con questi filtri si sono ottenuti 602 reverse convertible bonds. Tra questi si è calcolato il prezzo di 7 obbligazioni in quanto erano le uniche fornite di tutti i dati necessari per svolgere la valutazione. Datastream, infatti, non dispone di tutti i dati relativi a questa tipologia di bond, in particolar modo riguardo al prezzo di mercato e al CDS dell'emittente.

¹Si veda *Appendice A*.

²Si veda *Appendice A*.

Nelle seguenti tabelle si riassumono i dati principali ottenuti da Datastream relativi ai 7 reverse convertible bonds:

	RC Bond 1	RC Bond 2	RC Bond 3	RC Bond 4
Emittente	GOLDMAN SACHS GROUP INC	JPMORGAN CHASE and CO	JPMORGAN CHASE and CO	BARCLAYS BANK PLC
ISIN	US38148X8377	US48127Y1698	US48128A5415	US06740Q4432
Data emissione	27/5/16	2/12/15	12/1/16	25/5/16
Data scadenza	2/6/17	20/12/16	24/1/17	31/5/17
Ammontare emesso	33.272,850	100.166,640	150.345,100	308.817,600
Valuta	USD	USD	USD	USD
Valore coupon	7	6	6,5	7
Frequenza coupon	Trimestrale	Trimestrale	Trimestrale	Trimestrale
Date pagamento coupon	2/9/16 2/12/16 2/3/17 2/6/17	21/12/15 21/3/16 21/6/16 20/9/16 20/12/16	24/1/16 24/4/16 24/7/16 24/10/16 24/1/17	1/9/16 1/12/16 1/3/17 31/5/17
Convertibile in azioni	Charles Schwab Corporation	Medtronic	Target Corporation	Microsoft Corporation
Prezzo sottostante	29,8	83,32	68,81	52,13
Volatilità sottostante	0,3444	0,203	0,2377	0,2678
Conversion price	29,445	76,58	74,65	50,96
Conversion ratio	1	1	1	1
Par Value	29,445	76,58	74,65	50,96
CDS Open	96,949	64,378	64,378	108,642
CDS High	96,949	64,951	64,951	111,513
CDS Low	94,087	62,55	62,55	108,642
CDS Last	94,087	62,55	62,55	109,147
Bid Price	29,436	81,762	69,589	51,587
Ask Price	29,936	82,262	70,089	52,087

	RC Bond 5	RC Bond 6	RC Bond 7
Emittente	BARCLAYS BANK PLC	CITIGROUP INC	CITIGROUP INC
ISIN	US06743T7587	US17323Q8583	US17323B1171
Data emissione	27/11/15	17/7/15	10/6/15
Data scadenza	1/12/16	22/7/16	15/6/16
Ammontare emesso	100.018,500	200.085,600	200.873,880
Valuta	USD	USD	USD
Valore coupon	6	7,5	6
Frequenza coupon	Trimestrale	Trimestrale	Trimestrale
Date pagamento coupon	1/3/16 1/6/16 1/9/16 1/12/16	22/10/15 22/1/16 22/4/16 22/7/16	15/9/15 15/12/15 15/3/16 15/6/16
Convertibile in azioni	Medtronic	Intel Corporation	Microsoft Corporation
Prezzo sottostante	83,32	31,68	52,13
Volatilità sottostante	0,203	0,2414	0,2678
Conversion price	76,35	29,15	47,22
Conversion ratio	1	1	1
Par Value	76,35	29,15	47,22
CDS Open	108,642	84,073	84,073
CDS High	111,513	84,073	84,073
CDS Low	108,642	81,522	81,522
CDS Last	109,147	81,522	81,522
Bid Price	81,344	31,423	52,2067
Ask Price	81,594	31,548	52,2317

Emittenti:

- i. La *Goldman Sachs Group Inc.* è una delle più grandi banche d'affari del mondo, che si occupa principalmente di investimenti bancari e azionari, di risparmio gestito e di altri servizi finanziari, prevalentemente con investitori istituzionali (multinazionali, governi e privati).
- ii. La *JP Morgan Chase and Co* è una società finanziaria con sede a New York, ed è leader nei servizi finanziari globali.

-
- iii. La *Barclays Bank Plc* è una banca internazionale britannica presente in oltre cinquanta Paesi.
 - iv. La *Citigroup Inc.* è la più grande azienda di servizi finanziari del mondo. Nel 2005 risulta la terza più grande azienda in termini di capitalizzazione del mercato e la più grande in termini di asset.

Titoli azionari sottostanti:

- I - La *Ford Motor Company* è una casa automobilistica statunitense, fondata da Henry Ford a Dearborn nel 1903.
- II - La *Charles Schwab Corporation* è una società di investimento e pianificazione finanziaria, fondata nel 1971 da Charles R. Schwab con sede a S. Francisco, California.
- III - La *Medtronic* è una delle più grandi aziende al mondo di tecnologie biomediche. Fu fondata il 29 aprile 1949 da Earl E. Bakken e Palmer Hermundaslief a Minneapolis, Minnesota.
- IV - La *Target Corporation* è una catena di distribuzione statunitense, fondata da George Dayton con sede a Minneapolis, Minnesota.
- V - La *Microsoft Corporation* è una delle più importanti aziende d'informatica del mondo, la più grande produttrice di software al mondo per fatturato e anche una delle più grandi aziende per capitalizzazione azionaria. Ha sede a Redmond nello stato di Washington (Stati Uniti).
- VI - L'*Intel Corporation* è la più grande azienda multinazionale produttrice di dispositivi a semiconduttore (microprocessori, dispositivi di memoria, circuiti di supporto alle telecomunicazioni e alle applicazioni informatiche) con sede a Santa Clara, California, fondata nel 1968.

E' inoltre necessario fare alcune osservazioni sui valori forniti da Datastream:

- * **Valore del coupon:** il valore del coupon indicato da Datastream si riferisce alla somma delle cedole pagate dall'emittente all'investitore in 1 anno. Dunque, se si considera un'obbligazione in cui la frequenza del coupon è trimestrale occorre dividere il valore del coupon fornito dal database per 4 (o per 5 nel caso in cui in 1 anno vengono pagati 5 coupon, come per i bond 3 e 4.).
- * **Prezzo sottostante:** si riferisce al prezzo del titolo azionario sottostante.
- * **Volatilità:** indica la volatilità ad 1 anno del titolo azionario sottostante.
- * **Par value:** rappresenta il valore facciale del bond.

-
- * **CDS Open:** primo valore di Credit Default Swap sull'emittente registrato nell'arco della giornata considerata.
 - * **CDS High:** il più alto valore di Credit Default Swap sull'emittente registrato nell'arco della giornata considerata.
 - * **CDS Low:** il più basso valore di Credit Default Swap sull'emittente registrato nell'arco della giornata considerata.
 - * **CDS Last:** ultimo valore di Credit Default Swap sull'emittente registrato nell'arco della giornata considerata.
 - * **Bid Price** (prezzo denaro): prezzo massimo che un operatore è disposto a pagare per acquistare uno strumento finanziario.
 - * **Ask Price** (prezzo lettera): prezzo minimo che un venditore è disposto ad accettare per vendere uno strumento finanziario.

La valutazione dei 7 reverse convertible bonds appena descritti è stata eseguita il giorno **6/6/2016**: dunque i tassi di interesse, il prezzo e la volatilità del titolo azionario sottostante, il CDS sull'emittente e il prezzo di mercato del reverse convertible bond sono stati presi relativamente a questa data.

In seguito si descrive nel dettaglio il procedimento che ha portato alla determinazione del prezzo di queste obbligazioni.

Considerando la formula definita nel capitolo precedente - equazione (3.26) - e prendendo come dati quelli del RC bond 5, forniti da Thomson Reuters Datastream, si ha:

$$c = \frac{6}{4} = 1,5 \quad \text{Coupon}$$

Il valore del coupon indicato da Datastream è di 6, ma, come spiegato precedentemente, tale valore si riferisce alla somma delle cedole pagate dall'emittente all'investitore in 1 anno. In questo caso, come illustrato nella tabella, in 1 anno avvengono 4 pagamenti dei coupon. Per tale motivo, il prezzo di ciascuna cedola è di $\frac{6}{4}$.

Dato che il coupon-bond ordinario è esposto a rischio di credito, i tassi di interesse che si considerano per determinarne il prezzo, come illustrato nel capitolo precedente, sono dati dalla somma

$$\rho_i = r_i + s$$

dove

r_i : tasso di interesse risk-free, si è preso il tasso Libor USD³ (dato che per tutti i casi qui illustrati la valuta è il dollaro) a 3, 6, 9⁴ e 12 mesi.

s : spread che dipende dall'emittente, si è considerato il CDS sull'emittente prendendo la media tra il primo, ultimo, più alto e più basso valore di CDS registrato nel giorno considerato (6/6/2016) che occorre poi dividere per 10.000.

$r_1 = 0,0066065$ Tasso di interesse Libor USD a 3 mesi

$r_2 = 0,0095420$ Tasso di interesse Libor USD a 6 mesi

$r_3 = 0,0116251$ Tasso di interesse Libor USD a 9 mesi

$r_4 = 0,0128560$ Tasso di interesse Libor USD a 12 mesi

$CDS_O = 108,642$ Primo CDS registrato il giorno 6/6/2016

$CDS_H = 111,513$ Il più alto CDS registrato il giorno 6/6/2016

$CDS_L = 108,642$ Il più basso CDS registrato il giorno 6/6/2016

$CDS_C = 109,147$ Ultimo CDS registrato il giorno 6/6/2016

$$\begin{aligned} \Rightarrow s &= \frac{CDS_O + CDS_H + CDS_L + CDS_C}{4} = \frac{108,642 + 111,513 + 108,642 + 109,147}{4} \\ &= \frac{109,486}{10.000} = 0,0109 \quad \text{Spread} \end{aligned}$$

$$\rho_1 = r_1 + s = 0,0066065 + 0,0109 = 0,0175065$$

Tasso di interesse aggiustato in base al rischio di credito con tasso risk-free a 3 mesi

$$\rho_2 = r_2 + s = 0,009542 + 0,0109 = 0,020442$$

Tasso di interesse aggiustato in base al rischio di credito con tasso risk-free a 6 mesi

$$\rho_3 = r_3 + s = 0,0116251 + 0,0109 = 0,0225251$$

³Il tasso Libor si è ricavato dal sito internet <http://www.global-rates.com/>.

⁴Il tasso di interesse Libor a 9 mesi è un dato non rintracciabile né dal sito <http://www.global-rates.com/> nè da altre fonti, per tale motivo è stato ricavato con il metodo di interpolazione di Lagrange.

Tasso di interesse aggiustato in base al rischio di credito con tasso risk-free a 9 mesi

$$\rho_4 = r_4 + s = 0,012856 + 0,0109 = 0,023756$$

Tasso di interesse aggiustato in base al rischio di credito con tasso risk-free a 12 mesi

Osservazione In questo caso, dato che la valutazione viene svolta il giorno 6/6/2016 e i coupon vengono emessi nelle seguenti date

$$1/3/2016 \quad 1/6/2016 \quad 1/9/2016 \quad 1/12/2016 \text{ (Scadenza)}$$

per il calcolo del prezzo del coupon-bond ordinario si considerano solo:

- i tassi di interesse aggiustati in base al rischio di credito con tasso Libor a 9 mesi e 12 mesi;
- le date successive al giorno in cui si è svolta la valutazione, ossia 1/9/2016 e 1/12/2016, dunque

$$t_3 = \frac{87}{365} = \frac{\text{Data pagamento } 3^\circ \text{ coupon} - \text{Data valutazione}}{365} \quad \text{Istante pagamento } 3^\circ \text{ coupon}$$

$$t_4 = \frac{178}{365} = \frac{\text{Data pagamento } 4^\circ \text{ coupon} - \text{Data valutazione}}{365} \quad \text{Istante pagamento } 4^\circ \text{ coupon}$$

Nella valutazione dell'opzione put,

$r = 0,0128560$ tasso di interesse Libor USD ad 1 anno

$N = 76,35$ Valore nominale

$C_r = 1$ Rapporto di conversione

$K = 76,35$ Par value

$S = 83,32$ Prezzo del titolo azionario sottostante

$\sigma = 0,203$ Volatilità ad 1 anno del titolo azionario sottostante

$$T - t = \frac{178}{365} = \frac{\text{Data scadenza} - \text{Data valutazione}}{365}$$

$$d_1 = 0,7314$$

$$d_2 = 0,5896$$

$\mathcal{N}(-d_1) = 0,232267433$ Distribuzione normale standard di $(-d_1)$

$\mathcal{N}(-d_2) = 0,277729426$ Distribuzione normale standard di $(-d_2)$

Si ottiene che il prezzo del coupon bond ordinario in questo caso vale

$$P_{CB} = \frac{c}{(1 + \rho_3)^{t_3}} + \frac{c + N}{(1 + \rho_4)^{t_4}} = \frac{1,5}{(1 + 0,0225251)^{\left(\frac{87}{365}\right)}} + \frac{1,5 + 76,35}{(1 + 0,023756)^{\left(\frac{178}{365}\right)}} = 78,454$$

Il prezzo dell'opzione put vale

$$\begin{aligned} P_{OP} &= Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) + S\mathcal{N}(-d_1) = 76,35 e^{-(0,0128560)(\frac{178}{365})} (0,277729426) - (83,32) (0,232267433) \\ &= 1,7196 \end{aligned}$$

Dunque il **prezzo del reverse convertible bond 5** è così definito:

$$P = P_{CB} - C_r P_{OP} = 78,454 - 1,7196 = 76,7344$$

Il prezzo di mercato di un'obbligazione si ottiene invece calcolando la media tra il *bid price* e l'*ask price*, in questo caso si ha

$$\begin{aligned} BP &= 81,344 && \text{Bid Price;} \\ AP &= 81,594 && \text{Ask Price;} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow PM = \frac{BP + AP}{2} = \frac{81,344 + 81,594}{2} = 81,469$$

Questo è il prezzo di mercato del reverse convertible bond 5.

E', inoltre, possibile verificare se i reverse convertible bonds siano sottoprezzati o sovrapprezzati dal mercato andando a calcolare l'*overvaluation*:

$$Overvaluation = \frac{\text{Prezzo di mercato} - \text{Prezzo calcolato}}{\text{Prezzo calcolato}} 100\%$$

- se $Overvaluation > 0\%$ \Rightarrow **sovrapprezzo (overpricing)** del valore fornito dal mercato;
- se $Overvaluation < 0\%$ \Rightarrow **sottoprezzo (underpricing)** del valore fornito dal mercato.

Nell'esempio considerato,

$$Overvaluation = \frac{PM - P}{P} 100\% = \frac{81,469 - 76,7344}{76,7344} 100\% = 6,1701\%$$

Possiamo dunque concludere che , per quanto riguarda il reverse convertible bond preso in esame, vi è una sopravvalutazione del prezzo di mercato del 6%.

Si riassumono nella seguente tabella i risultati ottenuti per gli altri reverse convertible bonds, procedendo analogamente a quanto fatto per l'obbligazione appena descritta:

	Prezzo Bond	Prezzo Put	Prezzo RC Bond	Prezzo Mercato	Overvaluation
RC BOND 1	35,7190	3,6493	32,0696	29,686	-7,4327%
RC BOND 2	79,4147	1,8774	77,5373	82,012	5,771%
RC BOND 3	77,6251	8,4048	69,2202	69,839	0,8939%
RC BOND 4	56,7014	4,5546	52,1469	51,837	-0,5942%
RC BOND 5	78,4540	1,7196	76,7344	81,469	6,1701%
RC BOND 6	30,9433	0,2208	30,7225	31,4855	2,4834%
RC BOND 7	48,6949	0,0065	48,6884	52,2192	7,2518%

Come si può notare dai risultati illustrati nella tabella, il prezzo calcolato ed il prezzo di mercato di questi reverse convertible bonds sono confrontabili, ossia l'overvaluation è relativamente basso.

Si riscontra, inoltre, un sovrapprezzo per i reverse convertible bond 2, 3, 5, 6 e 7; mentre vi è una sottovalutazione per le obbligazioni 1 e 4, ossia per il bond emesso da Goldman Sachs Group Inc. ed uno emesso dalla Barclays Bank Plc.

Appendice A

Terminologia

- * **Bond floor** (B_F)(%) Il bond floor denota il valore attuale di tutti i flussi di cassa presenti nei convertible bonds trascurando ogni possibile conversione. Esso rappresenta il valore più basso che un'obbligazione convertibile può assumere; infatti, al di sotto di tale soglia, l'opzione di conversione sarebbe inutile in quanto il prezzo delle azioni sottostanti sarebbe sceso notevolmente al di sotto del valore di conversione. Il bond floor è spesso altresì definito *investment value*.
- * **Callable bond** Un callable bond è un'obbligazione che consente all'emittente di "richiamare" (ed estinguere) l'obbligazione alla pari (prezzo di rimborso) prima della sua scadenza. Tale facoltà rappresenta un'opzione call implicitamente venduta dall'investitore all'emittente, avente come sottostante lo stesso titolo obbligazionario. All'emittente converrà richiamare l'obbligazione se il suo valore è salito sopra alla pari a causa del ribasso dei tassi di interesse. Qualora si verifichi tale situazione, il possessore del convertible bond subirà una perdita pari alla differenza tra il prezzo di mercato dell'obbligazione (superiore al valore nominale) e il prezzo di rimborso. Dopo il rimborso forzato, l'emittente potrà indebitarsi a tassi più convenienti.
- * **Contratti swap** I contratti swap sono un'importante tipologia di derivati che prevedono lo scambio tra diverse variabili (tasso fisso contro variabile ma anche tasso variabile contro variabile, fisso contro fisso, valuta domestica contro valuta estera) o tra diversi titoli (asset swap), sebbene l'interest rate swap (IRS, tasso fisso contro variabile) è la tipologia più nota e diffusa.
- * **Coupon (o cedola) (c)** Il coupon (o cedola) rappresenta l'interesse versato periodicamente dall'emittente del bond all'investitore. In Europa la frequenza del pagamento del coupon è quasi sempre annuale; negli Stati Uniti e in Giappone, invece, spesso il versamento delle cedole avviene ogni sei mesi. La maggior parte delle obbligazioni convertibili includono dei coupon a tasso fisso, mentre per una piccola parte i coupon sono a tasso variabile.
- * **Current Yield (CY)** Il current yield è il rendimento dato dal rapporto tra la cedola annua ed il prezzo di mercato del titolo obbligazionario.
- * **Delta (Δ)** Il delta è un indicatore che esprime la *sensibilità* di uno strumento derivato, ossia mostra la variazione del prezzo di un convertible bond associata alla variazione (di un punto percentuale) del prezzo dell'attività sottostante. In termini più formali, il delta è la derivata prima del prezzo dell'obbligazione convertibile (P) rispetto al prezzo dell'azione sottostante (S):

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$$

Per *opzioni plain vanilla* il delta è:

-
- positivo per acquirenti di call e venditori di put;
 - negativo per acquirenti di put e venditori di call;
 - vicino allo zero per le opzioni out of the money;
 - vicino ad uno in valore assoluto per le opzioni in the money.

Per le *opzioni esotiche*, in particolari condizioni (come nelle *opzioni barriera*), il delta può essere maggiore dell'unità.

Solitamente, i traders e i market makers preferiscono esprimere la sensibilità di un convertible bond tramite il $\Delta\%$:

$$\Delta\% = \frac{\Delta \times N}{100 \times C_r}$$

dove

N è il valore facciale;

C_r è il rapporto di conversione.

- * **Gamma (Γ)** Il gamma esprime la *convessità* o la non linearità di uno strumento. Esso rappresenta la variazione del delta al variare del prezzo dell'attività sottostante (= delta del delta). In termini più formali, il gamma è la derivata seconda del prezzo del convertible bond (P) in funzione del prezzo del sottostante (S):

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

- * **Interest Rate Swap (IRS)** L'interest rate swap (IRS) è un contratto in base al quale le due parti contraenti, senza alcun pagamento iniziale, assumono il reciproco impegno di scambiarsi periodici interessi su un capitale di riferimento (capitale nozionale) per un periodo di tempo prefissato (durata dello swap). Nella tipologia fisso contro variabile, una parte, detta payer o buyer, paga tasso fisso e riceve tasso variabile; l'altra parte, detta receiver o seller, paga tasso variabile e riceve tasso fisso.

- * **Investment premium** L'investment premium indica quanto l'investitore è disposto a pagare per l'opzione incorporata nel convertible bond. Questo è anche definito *premio al bond floor*:

$$\frac{P - B_F}{B_F}$$

La formula appena specificata è espressa in %, ma è anche possibile denotarla sotto forma di punti:

$$P - B_F$$

- * **Opzione call** Un'*opzione call europea* è un contratto che dà il diritto a comprare un titolo finanziario, di prezzo S_T , detto *sottostante dell'opzione*, ad una certa data T detta *data di esercizio* o *data di scadenza (maturity)* dell'opzione, ad un dato prezzo predefinito K detto *prezzo strike* o *prezzo di esercizio*.

Il payoff di un'opzione call è il seguente:

$$\max(0, S_T - K)$$

Un'*opzione call americana* è un contratto analogo all'opzione call europea, con la differenza che con questa opzione è possibile esercitare il diritto di acquisto anche prima della scadenza.

-
- * **Opzione put** Un'opzione put europea è un contratto che conferisce il diritto di vendere il sottostante, di prezzo S_T , alla data di esercizio T (*maturity*) ad un dato prezzo prestabilito K (*prezzo strike*).

Il payoff di un'opzione put è così definito:

$$\max(0, K - S_T)$$

Un'opzione put americana è un contratto analogo all'opzione put europea, con la differenza che con questa opzione è possibile esercitare il diritto di vendita anche prima della scadenza.

- * **Parity (P_a)** La parity rappresenta il valore delle azioni nel quale il bond può essere convertito. Esso equivale al rapporto di conversione (C_r) per il prezzo di ciascuna azione (S) espresso come percentuale del valore facciale se il bond è convertito con una percentuale del valore facciale:

$$P_a = \frac{C_r \times S}{N}$$

Quando, invece, il bond è convertito in azioni, la parity è definita nel modo seguente:

$$P_a = C_r \times S$$

- * **Premio alla parity (%)** Il premio alla parity indica quanto un investitore in convertible bond è disposto a pagare per possedere l'obbligazione convertibile invece delle azioni sottostanti:

$$\frac{P - P_a}{P_a}$$

Il premio alla parity può anche essere espresso sotto forma di punti. In questo caso è definito *dollar premium*:

$$P - P_a$$

- * **Prezzo di conversione (C_P)** Il prezzo di conversione è il prezzo che viene pagato al momento della conversione. E' dato dal rapporto tra il valore nominale (N) e il rapporto di conversione (C_r):

$$C_P = \frac{N}{C_r}$$

Questo valore, fissato al momento dell'emissione dell'obbligazione convertibile, può essere flessibile, ossia aggiustato al rialzo o al ribasso. Al ribasso, la revisione dell'andamento del titolo provoca un aumento di azioni che l'investitore ha diritto di ricevere dopo la conversione in modo tale che possa essere risarcito per il deludente andamento del titolo.

- * **Puttable bond** Un puttable bond è un'obbligazione che consente all'investitore di cedere all'emittente l'obbligazione al valore facciale. Il possessore di un convertible bond può trarre vantaggio da tale situazione se il prezzo del bond, a seguito di un rialzo dei tassi, è sceso sotto la pari. Dopo la cessione, l'investitore potrà investire a tassi più elevati.

- * **Rapporto di conversione (C_r)** Il rapporto di conversione è il numero di azioni ottenibili dalla conversione di ciascuna obbligazione convertibile.

- * **Valore facciale o valore nominale (N)** Il valore facciale (o anche definito valore nominale) è il valore che l'emittente rimborsa all'investitore alla scadenza dell'obbligazione, nel caso in cui quest'ultimo decida di non convertire il bond in azioni.

Appendice B

Opzioni Esotiche

Vi sono alcune tipologie di opzioni e derivati che, per la peculiarità dei payoff e delle clausole contrattuali rispetto alle opzioni standard (*plain vanilla*), sono definite "esotiche".

I prodotti esotici sono stati creati ed hanno un enorme successo in quanto rispetto alle opzioni plain vanilla:

- garantiscono maggior flessibilità nelle strategie operative degli investitori;
- offrono rendimenti potenzialmente più attraenti;
- alcune di queste opzioni possono essere negoziate a costi più contenuti.

Questi contratti vengono negoziati OTC (over the counter) proprio a causa della mancanza di standardizzazione degli elementi contrattuali.

Nella seguente appendice si accennano solo alcuni tra i più importanti esempi di opzioni esotiche:

- binarie;
- composte;
- chooser;
- barriera;
- asiatiche;
- lookback;
- forward-start.

Le ultime quattro opzioni, oltre ad essere esotiche, sono anche path-dependent.

Opzioni binarie

Le opzioni binarie (o digital) sono la tipologia più semplice di opzione esotica. Il payoff di tale opzione è limitato e può essere un ammontare fissato oppure la differenza tra il prezzo del bene sottostante e un livello predefinito il quale spesso è differente al prezzo strike. Vi sono molte emissioni di opzioni binarie in quanto facili da usare.

Opzioni composte

Le opzioni composte sono opzioni scritte su altre opzioni standard. Esistono due tipi di opzioni standard (plain vanilla), call e put, dunque si hanno quattro tipologie di opzioni composte: call scritte su call, call scritte su put, put scritte su call e put scritte su put. L'acquirente di tale opzione normalmente paga un premio iniziale anticipato per un'opzione di cui potrebbe aver bisogno successivamente. Dovrà pagare un ulteriore premio solo se deciderà di usufruire di tale opzione. Se, invece, non ritiene conveniente esercitarla, rinuncerà semplicemente a tale diritto.

Opzioni chooser

Le opzioni chooser (o anche definite as-you-like-it) conferiscono al suo possessore il diritto di scegliere, entro una data predefinita, se a scadenza l'opzione debba essere considerata di tipo call (attribuendogli il diritto di acquistare il bene sottostante) oppure un'opzione di tipo put (attribuendogli il diritto di vendita del bene sottostante) in base alla convenienza che ne ricava al momento in cui diventa esercitabile tale diritto.

Opzioni path-dependent

Le opzioni path-dependent sono opzioni il cui payoff dipende da uno o più valori assunti in passato dal prezzo del sottostante.

Esistono quattro importanti tipi di opzioni path-dependent:

1. *Opzioni asiatiche o average options*
2. *Opzioni barriera*
3. *Opzioni lookback*
4. *Opzioni forward-start*

Opzioni asiatiche

Le opzioni asiatiche sono opzioni il cui payoff viene determinato dalla media, che può essere aritmetica o geometrica (sebbene i traders usino quasi esclusivamente quella aritmetica), dei prezzi del sottostante in un determinato periodo di tempo prima della scadenza.

Opzioni barriera

Le opzioni barriera sono state probabilmente le prime opzioni esotiche ad essere negoziate. Per questa tipologia di opzioni, il valore finale dipende dal fatto che il prezzo dell'attività sottostante raggiunga o meno un determinato valore definito appunto *barriera*. Le opzioni barriera possono essere sia call che put e appartengono a due categorie:

- **knock-in**, il cui possessore ha diritto di ricevere un'opzione Europea se il prezzo del sottostante 'colpisce' la barriera, altrimenti riceve un rimborso alla scadenza;
- **knock-out**, il cui possessore ha diritto di ricevere un rimborso non appena il prezzo del sottostante 'colpisce' la barriera, altrimenti riceve un'opzione Europea.

Sulla base di queste categorie, si individuano quattro tipi di opzioni barriera:

- i) **up-and-in**, l'opzione inizia ad esistere quando il sottostante supera al rialzo la barriera prima della scadenza;
- ii) **down-and-in**, l'opzione inizia ad esistere quando il sottostante supera al ribasso la barriera prima della scadenza;
- iii) **up-and-out**, l'opzione cessa di esistere quando il sottostante supera al rialzo la barriera prima della scadenza;
- iv) **down-and-out**, l'opzione cessa di esistere quando il sottostante supera al ribasso la barriera prima della scadenza.

Opzioni lookback

Le opzioni lookback sono opzioni il cui payoff dipende non soltanto dal prezzo del sottostante, ma anche anche dal prezzo minimo e massimo raggiunto dal sottostante prima della scadenza.

Opzioni forward-start

Le opzioni forward-start (opzioni a decorrenza posticipata) sono una tipologia di opzione con scadenza T_2 che viene stipulata e pagata in un momento iniziale T_0 , ma che non può essere esercitata prima di una data futura T_1 ($T_0 < T_1 < T_2$). La durata dell'opzione forward è dunque $T_2 - T_1$.

Bibliografia

- [1] A. Banfi, *'Le obbligazioni convertibili in azioni: aspetti teorici e prassi applicativa nel mercato mobiliare italiano'*, Il Mulino, Bologna, 1990.
- [2] G. Domenichini, *'Le obbligazioni convertibili in azioni'*, A. Giuffrè, Milano, 1993.
- [3] J. D. Spiegeleer, W. Schoutens, *'The Handbook of Convertible Bonds: pricing, strategies and risk management'*, Wiley, 2011.
- [4] J. E. Ingersoll, *'A contingent-claims valuation of convertible securities'*, Journal of Financial Economics - North Holland Publishing Company, 1997.
- [5] Mckinley, Degregori and Partners, *'Quaderni di Finanza: Reverse Convertible'*, Edizioni R. E. I, 2014.
- [6] M. Szymanowska, J. T. Horst, C. Veld, *'Reverse Convertible Bonds Analyzed'*, 2008.
- [7] P. Casella, *'Le obbligazioni convertibili in azioni'*, A. Giuffrè, Milano, 1983.
- [8] P. G. Zhang, *'Exotic options: a guide to Second Generation Options'*, Word Scientific, 1996.
- [9] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison, *'Option pricing: Mathematical models and computation'*, Oxford Financial Press, 1993.
- [10] R. Cavallo Borgia, *'Le obbligazioni convertibili in azioni'*, A. Giuffrè, Milano, 1978.
- [11] R. Cesari, *'Introduzione alla finanza matematica: derivati, prezzi e coperture'*, Springer- Verlag, Milano, 2009.

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il mio relatore, la professoressa Rossella Agliardi, per la competenza con cui mi ha indirizzata nelle occasioni di dubbio e per la pazienza ed enorme disponibilità che mi ha dimostrato. Ringrazio, inoltre, il correlatore di questa tesi, il professor Andrea Pascucci, che attraverso i suoi corsi mi ha trasmesso la passione per la Finanza Matematica. I professori che con i loro elogi e rimproveri mi hanno fatto crescere molto facendomi diventare la persona che sono, determinata e forte. Ringrazio infinitamente la dottoressa Alice Barbieri a cui mi sono sempre rivolta per i suoi preziosi consigli. Un ringraziamento speciale è rivolto agli esperti tecnici del database Thomson Reuters Datastream. E poi vorrei ringraziare coloro che hanno permesso tutto ciò, i miei genitori, che come me hanno fatto sacrifici in modo tale che potessi raggiungere questo importante traguardo. Ringrazio mio padre, perché con il suo sano ottimismo e la sua positività mi ha rincuorato e sostenuto nei momenti più difficili. Dedico questa tesi a mia madre, la quale, sebbene non sia fisicamente al mio fianco, poggia ogni giorno la sua mano sulla mia spalla ed è grazie a questa sua 'presenza' che ogni volta che cado ho la forza di rialzarmi. Sono sicura che ovunque essa sia si starà commuovendo nel vedermi laureare una seconda volta. Ringrazio mia sorella Alice che mi ha sempre consigliata e spronata nel non mollare mai credendo sempre in me. Nonostante abbiano portato un bel po' di scompiglio in casa, ringrazio anche le mie nipotine, Maya ed Aurora, che riescono sempre a darmi un sorriso ogni volta che le stringo fra le mie braccia. Un pensiero speciale è rivolto all'angelo che ogni giorno protegge la mia famiglia, nonna Egle. E, *dulcis in fundo*, un ultimo ringraziamento è rivolto alle mie amiche con le quali condivido non solo le nostre pazzesche serate latino americane ma anche tante nottate in macchina a piangere e chiacchierare. Grazie di cuore a tutti voi.

