

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica Curriculum Didattico

Insegnare matematica
nell'era digitale:
dall'ardesia al silicio in cinquant'anni

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Manuela Fabbri

Presentata da:
Camilla Valmorra

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

I Sessione
Anno Accademico 2015/16

*Alla mia famiglia e ad Andrea
che mi ha aiutata ed incoraggiata
in questi anni e in questa
mia ultima avventura*

Indice

Introduzione	I
1 La tecnologia entra a scuola	1
1.1 I pionieri degli anni '80	1
1.2 Verso la fine degli anni '80, il primo PNI	4
1.3 La prima metà degli anni '90 e il PNI2	6
1.4 Il Piano di Sviluppo delle Tecnologie Didattiche	7
1.5 Il nuovo millennio e l'era dell'e-learning	8
2 La scuola dopo il 2000 e la sfida del progresso tecnologico	13
2.1 Tecnologie per la didattica	14
2.2 La formazione del corpo docente	16
2.2.1 Il ForTIC	16
2.2.2 EPICIT, o Patente Pedagogica Europea per le ICT	17
2.3 Oltre il PC: LIM, cl@sse 2.0 e insegnanti	18
2.4 Il Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD)	22
2.4.1 Il PNSD in nove ambienti di sviluppo	23
2.4.2 Lo stato dell'arte	24
3 Software e linguaggi a supporto della matematica a scuola	27
3.1 Logo	29
3.2 Excel	34
3.3 BASIC	37
3.4 Pascal	39
3.5 Derive	42
3.6 HTML	46
3.7 Cabri	48
3.8 MatLab	53
3.9 Mathematica e Wolfram Alpha	58
3.10 Geogebra	66
3.11 Scratch	71

3.12 Code.org	74
4 Unità didattica: Probabilità	77
4.1 Contenuto e prerequisiti	79
4.2 Obiettivi	79
4.3 Percorso didattico	81
4.4 Valutazione	90
Conclusioni	93
Bibliografia	95
Sitografia	97

Introduzione

Oggi a scuola siamo ormai abituati a vedere apparecchiature elettroniche di vario genere, dai classici e ormai forse superati computer fissi, alle ultra moderne lavagne interattive multimediali sempre connesse ad internet, tablet ed e-book reader sempre in mano ai ragazzi fino ad arrivare alle più sofisticate stampanti 3D. Il percorso che ha condotto la scuola ad una modernizzazione così profonda e veloce è stato lungo e non certo libero da ostacoli, alcuni di carattere economico, altri insiti nello stesso DNA di una istituzione che, in centinaia di anni, non aveva ancora subito una trasformazione di tale portata. La strada è tracciata, ma il terreno non è ancora completamente libero, ci sono ostacoli da superare e barriere da abbattere per far sì che la tecnologia sviluppata in questi ultimi anni possa dispiegare le sue immense capacità così da poter essere sfruttata da tutti, insegnanti, alunni ma non solo, nel migliore dei modi possibili. La storia di come le macchine abbiano fatto capolino nel "pianeta scuola" non è molto lunga, se come unità di misura utilizziamo la storia vera e propria della scuola da quando i precettori babilonesi insegnavano la scrittura cuneiforme a piccoli gruppi di bambini. È un piccolo viaggio, fatto di persone, di leggi, di volontà e curiosità personali, di spirito d'iniziativa, di hardware e software alcuni dei quali hanno dato vita a nuovi software e nuove idee per utilizzarli in campi in cui gli stessi sviluppatori non avrebbero mai pensato potessero esser sfruttati.

È ben noto a tutti quanto la matematica sia ripudiata da grandi e piccini, a volte solo per presa di posizione personale che va poi a condizionarne lo studio e qualsiasi sua applicazione futura, anche la più banale. Oggi il progresso tecnologico ci consente di poter utilizzare contemporaneamente decine di applicazioni su dispositivi di varie dimensioni e potenze, dalle grandi LIM ai piccoli smartphone. Sicuramente qualcuna di queste potrebbe essere un software di matematica che, se insegnato correttamente potrebbe far rivedere ai ragazzi i futili preconcetti, e perché no, magari farli addirittura innamorare di questa meravigliosa disciplina. Nelle classi sono disponibili diverse applicazioni sia per aiutare gli insegnanti che per contribuire direttamente alla formazione degli allievi. Dalle più "vecchiette" ma rivedute e ancora

funzionanti come LOGO, passando per Derive e Cabri, fino ad arrivare ai recentissimi Scratch e Code. Questi ultimi in particolare fanno parte della famiglia di software per l'introduzione alle prime basi di programmazione, per far sì che la nuova generazione sia composta da veri "nativi digitali" e non siano solo dei fruitori della tecnologia. Il coding a scuola, oltre ad insegnare il pensiero computazionale, sprona i ragazzi a ragionare sulla costruzione delle applicazioni di cui avranno bisogno anziché abusare degli store pieni di applicazioni pronte all'uso.

Come la scuola, anche il metodo didattico dovrà subire variazioni notevoli. Nell'ultima sezione si propone e analizza la struttura di una unità didattica e di come l'uso delle tecnologie nella pratica quotidiana possa stimolare tutta la classe ad una maggiore attenzione ai procedimenti che vengono svolti e all'uso consapevole dei device a disposizione.

Capitolo 1

La tecnologia entra a scuola

Il mondo, si sa, è un organismo in continua evoluzione. La specie umana è sempre alla costante ricerca di metodi e strategie per progredire, ma soprattutto per semplificare e migliorare la propria condizione. A tutti è ben impresso nella memoria il racconto di come, agli albori della specie, venne sostituito il lavoro della mano nuda con una pietra scheggiata. Ben noto è anche come sia complesso, al complicarsi delle strutture sociali, il permeare di nuove scoperte e tecnologie in tutti gli strati del tessuto sociale per i quali le scoperte risulterebbero particolarmente indicate. Si possono riportare esempi per ogni era della tecnologia, si ricordi quanto fu complesso introdurre le macchine calcolatrici meccaniche, l'elettricità nelle città, la meccanizzazione dell'agricoltura e dell'industria. In buona parte si trattava di tecnologie ancora acerbe, ben lungi dall'essere di facile dominio per la massa. Negli ultimi anni, però, abbiamo assistito ad una netta inversione di tendenza, tanto che oggi più che mai la vita è invasa di tecnologia già prima della stessa nascita. Perché quindi anche un'istituzione vecchia come l'umanità, una struttura centenaria come il sistema scolastico non può giovare delle facilitazioni che la tecnologia mette a disposizione?

La realtà dei fatti ci insegna che il cambiamento nella scuola non è stato un passaggio obbligato né una logica conseguenza.

1.1 I pionieri degli anni '80

Chiunque si sia mai interessato all'informatica presente prima degli smartphone e dei tablet moderni avrà certamente visto qualche immagine di cosa fossero i computer prima che Bill Gates e Steve Jobs ne mettessero *"uno in ogni scrivania e uno in ogni casa"* (Bill Gates, 1975). I calcolatori riempivano camere intere, producevano temperature elevate, potevano essere utilizzati

solo da veri esperti, e soprattutto avevano costi eccessivi sia di acquisto che di manutenzione anche per alcuni istituti di ricerca che talvolta li acquistavano cooperando tra loro per affrontare le spese. Inoltre la loro utilità era relegata al solo calcolo matematico e l'interfaccia utente era il classico trattino verde lampeggiante che oggi ritroviamo quasi esclusivamente nei terminali dei nostri personal computer.

Con l'introduzione sul mercato dei primi personal computer, che di fatto permettevano l'introduzione dell'informatica nelle case grazie a dimensioni minime per l'epoca e a costi relativamente bassi, anche il mondo della scuola entrò indirettamente in contatto con l'Information and Communication Technology (ICT). La prima connessione tra scuola ed informatica avvenne grazie ai cosiddetti pionieri che iniziarono a studiare questa nuova tecnologia nella certezza, o forse meglio dire nella speranza, che questa potesse essere utile per il futuro della scuola intesa nella sua totalità, non relegata agli ambienti scientifici universitari o degli istituti tecnici superiori. All'alba degli anni '80 soprattutto i maestri di matematica, scienze ed educazione tecnica cominciano a procurarsi con i piccoli stipendi dell'epoca i primi Commodore, magari un VIC-20 usato per limitare le spese. Una volta capita la potenzialità dei computer per la didattica i docenti iniziano a portarli a scuola, ma solo a scopo dimostrativo. Solo quando questi pionieri cominciano a parlare di acquisto di macchine per scopi didattici si può dire che l'era dell'informaticizzazione della scuola ha inizio.

Nei primi anni '80 alcuni insegnanti iniziano ad acquistare i primi calcolatori che inizialmente erano molto limitati e limitanti in generale. L'introduzione di queste macchine all'avanguardia per gli anni, acquistata con i fondi ordinari delle singole scuole, avviene però solo sotto la spinta di singoli docenti a volte anche non visti di buon occhio dai colleghi. Per la scuola dell'obbligo si è ancora in totale assenza di un qualsiasi quadro normativo in materia di tecnologie informatiche nelle classi. Nel frattempo nelle singole istituzioni scolastiche si organizzano corsi di alfabetizzazione informatica per far conoscere anche solo le basi per l'utilizzo dei calcolatori. Questi corsi mirano a far comprendere cosa sia un calcolatore, la sua struttura interna, il suo sistema operativo, il modo in cui può essere realizzato un programma per mezzo di un linguaggio di programmazione spesso proprietario come il Basic della Microsoft. Non vi è però ancora nessuna traccia di un collegamento tra il computer e la didattica delle singole materie curriculari.

Nel giro di pochi mesi si passa dalla fase illustrativa del computer all'utilizzo in classe con gli alunni, orientata ad una loro basica alfabetizzazione informatica, seppur compiuta con materiali e strutture non idonei e soprattutto non sufficienti. I centri di ricerca che si occupavano di connessione informatica in ambito didattico erano scarsi, infatti si possono ricordare solo

pochi centri universitari e il Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) che si impegnavano attivamente per la diffusione della tecnologia. In particolare si ricorda l'Istituto per le Tecnologie Didattiche (ITD) del CNR di Genova che dagli anni '70 ha sviluppato il campo di ricerca sulle tecnologie didattiche ed educative in Italia.

La prima biblioteca italiana del software didattico, contenente al suo interno diversi software che in quegli anni sono stati sviluppati, viene aperta proprio da questi istituti nel 1985. Sono per lo più software che spiegano come fare qualcosa e software per esercitarsi, la maggior parte dei quali sviluppati solo ed esclusivamente in lingua inglese.

I programmi tutoriali sono dei veri e propri corsi su singoli argomenti di una disciplina, in larga maggioranza in ambito scientifico, realizzati secondo i principi dell'istruzione programmata e della Computer Aided Instruction (CAI)¹, rivolti quasi esclusivamente ai gradi superiori del panorama scolastico.

Nel 1976 lo psicologo Skinner proponeva di attuare una semplificazione dei contenuti da apprendere e un controllo immediato, che eliminasse subito l'errore. Si ha quindi un apprendimento individualizzato con il conseguente bisogno di un programma dettagliato e relativo ad ogni individuo. Insiste molto sui comportamenti logici, linguistici, operativi ed espressivi sull'apprendimento dei metodi per stabilire relazioni e per impostare generalizzazioni così da creare soluzioni nuove. Privilegia l'istruzione programmata e introduce macchine per insegnare, che consentano allo studente di avere a disposizione le unità di apprendimento, le domande di verifica e, in caso di errore, la possibilità di consultare nuovamente l'unità di apprendimento, o in caso di risposta esatta, il passaggio rinforzato alle unità seguenti. In questo modo lo studente può muoversi al suo ritmo naturale. Vuole evitare un'istruzione basata solo sulla ripetizione, incentivando i ragionamenti logici deduttivi. Dagli studi di Skinner nascono nei primi anni '80 i programmi drill & practice² i quali permettono la fruizione di esercizi calibrati su diversi livelli di difficoltà e lo sfruttamento delle embrionali possibilità interattive delle macchine disponibili. Durante l'esercitazione ad ogni risposta dell'utente il sistema fornisce un feedback che, in caso di errore dello studente, può far deviare momentaneamente il percorso prestabilito in favore di un rinforzo, una spiegazione, oppure semplicemente la presentazione della risposta esatta.

¹Letteralmente "istruzione assistita dall'elaboratore", individua prodotti software che permettono l'apprendimento individuale, tramite l'interazione con l'elaboratore

²Per definizione: "provare per tentativi ed esercitazioni". Sono programmi utili per esercitarsi grazie all'aiuto di apposite spiegazioni per rafforzare e consolidare quanto appreso. Servono perciò a rafforzare dei concetti che l'alunno non ha completamente appreso mettendo alla prova le capacità dell'alunno proprio attraverso dei programmi interattivi.

Questa tipologia di software didattici dovevano essere fruibili principalmente dagli allievi di scuole secondarie di primo grado e primarie con il preciso scopo di fornire un sistema individualizzato di recupero in campo matematico e linguistico.

In quegli anni la presenza nelle scuole di calcolatori con sistemi operativi diversi quasi sempre incompatibili con i vari pacchetti disponibili, la scarsa attrattiva che tali software privi di grafica e con una interattività più che limitata sapevano instillare negli utilizzatori finali, hanno fatto sì che questi prodotti avessero uno scarso impatto sul sistema scolastico.

1.2 Verso la fine degli anni '80, il primo PNI

Nel 1985 la società stava cominciando ad accettare la rivoluzione informatica del mondo del lavoro e iniziava a chiedere che anche la scuola seguisse questo trend, così in questi anni venne promosso il Piano Nazionale Informatica (PNI1), il primo programma introduceva le tecnologie nelle scuole di tutta Italia, in particolare veniva attivata la formazione dei docenti e la costruzione di strutture adeguate per gli ambienti scolastici. Questo era rivolto principalmente agli insegnanti di matematica e fisica del biennio delle scuole secondarie di secondo grado. L'intento di tale piano è quello di inserire tra le competenze del corpo insegnante anche quelle in campo informatico, almeno nell'utilizzo basilare di tali mezzi per far sì che questi siano in grado di affrontare con una adeguata preparazione i nuovi programmi di insegnamento che si iniziano in questo periodo a proporre, in via sperimentale, soprattutto in campo scientifico.

Alla base della realizzazione del PNI1 c'era l'idea che l'informatica, con i suoi metodi e i suoi linguaggi, potesse costituire la porta di ingresso per accedere alla società dell'informazione, che in questi anni si stava sviluppando grazie alla tecnologia del computer e che era al centro di grande discussione nell'opinione pubblica. Inoltre grazie al ragionamento strutturato tipico della programmazione informatica si poteva arrivare ad uno sviluppo cognitivo degli studenti e ad un nuovo metodo di insegnamento.

Pur non riuscendo a raggiungere gli obiettivi prefissati nella loro totalità, il piano ha comunque solcato un'importante sentiero di rinnovamento nelle pratiche didattiche costituendo una forte spinta per una rinnovata attenzione alle problematiche dell'ammmodernamento necessario in campo educativo sostenendo la curiosità dei docenti verso nuove strade di insegnamento fondate su competenze diverse e interdisciplinari.

Ancora nessun piano nazionale armonizzato per le scuole dell'obbligo che tuttavia svilupparono una varietà di iniziative sia a livello locale sia coordi-

nate a livello nazionale, tese all'introduzione nelle attività scolastiche delle tecnologie informatiche. Il progetto che più di altri ebbe un forte impatto sul piano della progettazione didattica fu il progetto IRIS (Iniziativa e Ricerche per l'Informatica nella Scuola), promosso dal CEDE di Frascati. Questo progetto indirizzato ai docenti di scuole primarie e secondarie di primo grado prevedeva la creazione di attività e dei relativi contenuti da distribuire agli insegnanti, da sperimentare in classe. L'obiettivo dei percorsi formativi era l'avviamento ad un uso consapevole dei calcolatori da parte degli studenti, facendo loro cogliere i collegamenti tra la scienza dell'informazione e altri campi della cultura umana, soprattutto quello scientifico-matematico. In questi anni, il potenziamento dell'hardware e lo sviluppo di sistemi operativi basati su GUI portò ad una rapida evoluzione di software sia di tipo professionale che didattico. Gli insegnanti di molte discipline degli istituti tecnici e professionali cominciarono ad integrare l'uso di software di riferimento per il loro indirizzo, come per esempio AutoCAD della Autodesk per il disegno e la progettazione tecnica, Adobe Photoshop e Aldus Freehand per il fotoritocco e la progettazione grafica.

Nelle altre discipline cominciano ad essere sostituiti i software tutoriali e i drill & practice con programmi professionali e didattici più avanzati come word processor, fogli di calcolo, progettazione di database. L'interfaccia grafica, la non necessità di conoscere linguaggi di programmazione di basso livello e la compatibilità dei programmi e dei file creati con le diverse piattaforme portò ad attribuire ai nuovi software funzionalità didattiche e a sfruttarle sul piano didattico pratico.

Sviluppati fundamentalmente per l'esclusivo uso didattico, i sistemi basati su micromondi e i sistemi di simulazione di fenomeni sono entrambi orientati alla soluzione di problemi e alla costruzione attiva di conoscenza in un certo dominio. Per la prima volta vengono introdotti dei software per la geometria dinamica, in particolare inizia a diffondersi Logo, un programma che unisce programmazione e geometria per far muovere una tartaruga dapprima meccanicamente su un foglio di carta, poi su uno schermo. Con questi tipi di programmi si introduce un nuovo metodo per la risoluzione dei problemi, infatti gli alunni sono spinti ad un ragionamento molto spesso astratto ma molto rigoroso per riuscire nella costruzione di qualcosa di concreto anche se ancora molto scarno e poco raffinato. I sistemi di simulazione sviluppati sul finire degli anni '80 consentivano agli utenti di toccarne con mano il funzionamento, di interfacciarsi attraverso un linguaggio diretto che consentiva di studiarne i cambiamenti e le regole per poterli "governare".

1.3 La prima metà degli anni '90 e il PNI2

Nel 1991 il Piano Nazionale Informatica viene aggiornato con l'estensione alle aree umanistiche della scuola secondaria di secondo grado e viene denominato PNI2. Con questo aggiornamento, la formazione dei docenti vira verso l'utilizzo di software per la didattica non solo meramente per le prime basi, ma questa volta per sfruttare a pieno i software che man mano si stavano diffondendo. Il nuovo piano inizia a modificare la visione globale dell'uso di computer e programmi per la didattica, non viene più visto come un qualcosa di inarrivabile, ma come nuova sfida da affrontare e vincere. Grazie a software sempre più performanti e a nuovi formati per la fruizione multimediale di contenuti non si pensa più solo a capire il funzionamento della macchina ma il punto focale diviene il contenuto dell'attività di insegnamento e gli aspetti concettuali che la caratterizzano, nascono così gli ipertesti molto diffusi e utilizzati nelle scuole italiane.

In questi anni, con il nuovo piano informatico ci si concentra principalmente sulla creazione di ipertesti multidisciplinari e sulla pratica con sistemi informatici nuovi. Con lo sviluppo di software, come ad esempio ToolBook, per la realizzazione di ipertesti, una nuova stagione della didattica viene aperta ed è subito sfruttata da molti insegnanti, primi fra tutti come è logico quelli di area scientifica ma questa volta anche di area umanistica, così da far creare proprio ai ragazzi nuovi progetti che uniscano in un tutto omogeneo non solamente una materia, ma anche altre relative al loro corso di studio. Si vuole far sviluppare la capacità di collegare i concetti fra le discipline per entrare nell'ottica dell'interdisciplinarietà. Si registra in quegli anni un notevole incremento di utilizzo degli ipertesti in tantissime scuole del paese, a prova del fatto che la modifica del metodo didattico è possibile, e soprattutto, è possibile l'inserimento della tecnologia.

Inoltre vengono introdotte nelle scuole anche nuove esperienze di comunicazione mediata da computer (CMC), brevi scambi di informazioni possibili tramite collegamenti di computer tra un istituto e un altro. Infatti in questi anni iniziano i primi collegamenti tra scuole tramite mail seppur a scopo puramente dimostrativo, rivolte a studenti e docenti. Erano comunicazioni progettate tra scuole dello stesso comprensorio e venivano scambiate poche informazioni, solo per verificare l'effettivo funzionamento del servizio e per mostrare agli studenti cosa era possibile fare con un computer. Si iniziava così ad intravedere la possibilità di comunicare anche a distanza di chilometri grazie a queste nuove macchine sempre più diffuse nella società.

1.4 Il Piano di Sviluppo delle Tecnologie Didattiche

Nel 1997 viene approvato un nuovo piano volto a promuovere l'educazione degli studenti alla multimedialità, al miglioramento della formazione dei docenti in campo tecnologico, la sperimentazione di progetti pilota relativi all'introduzione delle ICT nei curricula scolastici. Con il Programma di Sviluppo delle Tecnologie Didattiche (PSTD), iniziato nel 1997 e terminato nel 2000, si assiste all'ingresso delle tecnologie informatiche e multimediali nella scuola primaria e secondaria di primo grado dalla porta principale anziché, come sempre accaduto finora, da entrate di servizio con investimenti minimi o richieste di donazioni di materiali di recupero di aziende o addirittura con mezzi propri degli insegnanti.

Il PSTD venne strutturato in tre progetti.

I progetti generali, suddivisi a loro volta in due livelli: il primo dedicato alla fornitura e messa in opera di strutture operative adeguate per la formazione del corpo docente, il secondo per la messa in campo di unità operative utili alla crescita di attività didattiche che sfruttino a pieno tutta la multimedialità a disposizione.

Vennero anche attuati dei progetti pilota, volti alla sperimentazione, attuati in un numero limitato di scuole campione, di soluzioni didattiche innovative avanzate, allo scopo di orientare le evoluzioni future. Tra i molti progetti pilota i più importanti furono i progetti MultiLab, Polaris, Rete e Telecomunicando. Questi progetti erano indirizzati sia agli studenti sia ai docenti, infatti prevedevano l'utilizzo di CD-ROM, computer e anche altra strumentazione per creare e sfruttare la multimedialità a scuola, non solo ma era importante anche la formazione dei docenti, infatti erano previsti degli incontri formativi sull'utilizzo del computer per la comunicazione e trasmissione di documenti di vario tipo da attuarsi tra le scuole.

Il quinquennio che precede la fine del millennio vede una impennata impensabile fino a qualche anno prima sia in campo hardware che in campo software. In questi anni nascono i processori Pentium sviluppati da Intel, i quali portano non solo ad un abbassamento dei consumi energetici complessivi dei computer, ma ad un notevole incremento di potenza di calcolo a parità di risorse esterne usate. Ciò significa che gli sviluppatori di software hanno ora a disposizione macchine molto più potenti rispetto a quelle di un paio di anni prima e possono così implementare funzioni nuove rendendo più performanti i programmi ma anche più accattivante la grafica.

Nel campo della multimedialità avviene il definitivo passaggio dalla musicassetta al CD-ROM che poteva essere letto anche dai computer moderni

ed era in grado di contenere qualsiasi prodotto digitale. Per esempio, l'editoria comincia a mettere a disposizione vari programmi multimediali per l'apprendimento delle lingue, programmi in cui l'utente può interagire attivamente con il software. Sono dei programmi che prevedono lezioni suddivisi per difficoltà crescente così da portare l'utente man mano e con la pratica all'apprendimento di una nuova lingua con contenuti multimediali quali audio, esercizi da svolgere a schermo, la possibilità di consultare vocabolari e la correzione degli errori in automatico con relativa spiegazione. Nei libri di testo scolastici vengono anche inseriti CD-ROM per ampliare l'offerta formativa con esercizi per allenare lo studente, elementi per lo studio e il ripasso. L'integrazione e il progresso di hardware e software consentono la fruizione dei sistemi informatici opportunamente adattati ai soggetti diversamente abili nelle scuole, le cosiddette tecnologie assistive. L'uso di questi device ha offerto nuove prospettive pratiche per l'integrazione scolastica degli studenti disabili offrendo nuove soluzioni sul piano operativo, sul piano dell'accesso a contenuti e conoscenze, sul piano dello sviluppo di competenze e conoscenze disciplinari e sul piano della relazione interpersonale e della comunicazione. Questi anni si caratterizzano anche come gli anni della diffusione di Internet nelle scuole. Cominciano a moltiplicarsi i siti web anche grazie allo sfruttamento dello stesso linguaggio HTML che era alla base della creazione di ipertesti e alla creazione di programmi che non presupponevano lo studio di un linguaggio come si è visto in Toolbook, bensì consentivano la creazione di contenuti con elementi grafici (si ricordano Macromedia (poi Adobe) Dreamweaver pubblicato nel 1997 e Microsoft Frontpage). Man mano cresce anche l'utilizzo della rete per accedere alle molteplici informazioni offerte per la creazione di nuove attività e per la formazione online dei docenti. Questo portò alla collaborazione più attiva tra docenti anche di diversi istituti per lo scambio di idee, progetti e discussioni che portarono notevoli migliorie nelle relative pratiche didattiche.

1.5 Il nuovo millennio e l'era dell'e-learning

Si assiste in questi anni ad una notevole diffusione delle ICT nelle scuole e nella didattica in tutto il paese. Se nella scuola secondaria di secondo grado la parola d'ordine sembra essere diventata e-learning, cioè lo sfruttamento delle tecnologie per un apprendimento più ricco e un accesso diretto a tutto ciò che la rete può offrire, in altri ambiti c'è la diffusione di altri tipi di software e tecnologie. Un esempio è il software open source ³ che molte scuole e

³Open source: dall'inglese "sorgente aperta", è un software in cui i creatori pubblicano il codice sorgente mettendolo a disposizione di tutti. Lo scopo è quello di migliorare

università italiane conoscono grazie a progetti gratuiti come Mozilla Firefox, tutti i sistemi operativi basati su Linux come Debian, Ubuntu e tantissimi altri e soprattutto grazie ad un software dedicato interamente alla didattica della geometria nato nel 2001 chiamato Geogebra.

Inoltre nel 2001 con la C.M. 152 vengono predisposti finanziamenti per aumentare la formazione del personale scolastico con ambienti multimediali, per favorire l'accesso ai servizi tramite l'informatizzazione con la messa in rete di ogni istituto e per la creazione di postazioni per la navigazione. Con questa circolare venivano poste le basi per la digitalizzazione di base di ogni scuola Italiana. Ulteriore passo in avanti avvenne quando l'11 settembre 2006 il Ministro della Pubblica Istruzione Giuseppe Fioroni e il Ministro per le Riforme e l'Innovazione nella Pubblica Amministrazione Luigi Nicolais firmano l'accordo denominato "DiGi scuola". Questo progetto finanziato dal Comitato interministeriale per la programmazione economica (CIPE) aveva una durata di 18 mesi, da giugno 2006 a dicembre 2007 e coinvolgeva 550 scuole secondarie di secondo grado del Sud Italia e delle Isole con la finalità di mettere a disposizione di queste scuole materiali didattici digitali e dispositivi informatici. Prevedeva infatti la fornitura di materiale tecnologico quali PC, Lavagne Interattive Multimediali (LIM) (per la prima volta compaiono nelle scuole, finanziate dal Ministero) e proiettori digitali. Inoltre erano previsti corsi di formazione per l'utilizzo di questi materiali e assistenza per i docenti. Questo fu però un progetto indirizzato solo al Sud Italia e non a tutta la scuola Italiana sebbene l'intenzione fosse quella di portare la scuola Italiana agli standard europei migliorando l'apprendimento anche attraverso la tecnologia. Così il progetto venne ripreso dal Ministro della Pubblica Istruzione Maria Stella Gelmini nel 2008 (Comunicato stampa del 2 ottobre 2008) per la distribuzione di ulteriori 10'000 LIM per le scuole di tutta Italia.

Attualmente nelle scuole italiane sono presenti molti software a disposizione di docenti e studenti. Tra questi vi sono i pacchetti di scrittura, foglio di calcolo e presentazioni, ma anche programmi più specifici come quelli per il disegno tecnico o la realizzazione di pagine web e molti altri. Tutto sicuramente è stato reso possibile dalla diffusione di internet in tutti gli strati della società. Non è raro al giorno d'oggi che l'allievo abbia tra gli amici di Facebook il proprio professore di lettere come quello di matematica senza che nessuno se ne stupisca. Per quanto riguarda le competenze da sviluppare negli studenti, la patente europea del computer (ECDL - European Computer Driving License) è stata presa come standard per la scuola italiana. L'ECDL

e sviluppare il software grazie agli utenti che possono metterci mano apportando anche sostanziali modifiche grazie a specifiche licenze. Il web ha certamente favorito il dilagare di queste tipologie di software.

fa parte di un sistema di certificazione, a diversi livelli, delle competenze nel settore delle tecnologie dell'informazione concepito dal CEPIS (Council of European Professional Informatics Societies). Questi corsi, insieme a quelli per l'alfabetizzazione informatica di base, vengono regolarmente svolti da quasi tutte le scuole italiane.

Il D.lgs 59/2004, la cosiddetta riforma Moratti recante norme per la riforma della scuola primaria e secondaria di primo grado, richiama l'attenzione sull'informatica e la paragona ai classici strumenti scolastici da sempre presenti sul banco di ogni alunno, che va quindi integrata in tutto il percorso formativo e non deve essere considerata come una materia che esula completamente da tutte le altre. Anche nella formazione iniziale degli insegnanti molte Scuole di Specializzazione all'Insegnamento Secondario (SSIS) e molti corsi di laurea in Scienze della Formazione Primaria prevedono oggi corsi che trattano l'uso delle ICT e le relative applicazioni in campo didattico. Ma è nella formazione in servizio che l'e-learning è diventato l'approccio dominante. Infatti molto spesso e volentieri vengono attivati, oltre ai classici corsi di formazione indetti da regioni e comuni, anche corsi online indetti dai piani nazionali come ad esempio ForTic. Quest'ultimo è stato un programma di formazione online di forte impatto, era un'iniziativa del MIUR e veniva gestito da INDIRE tramite il sito web PUNTOEDU. Il programma, nato originariamente per la formazione dei docenti incaricati privi di titolo abilitante, si è pian piano esteso fino a coprire le richieste di formazione previste dal recente decreto della riforma scolastica, che va dalle competenze di base sull'uso del computer e delle ICT fino all'acquisizione di competenze avanzate e altamente specializzate come l'amministrazione di reti e infrastrutture tecnologiche.

Anche in campo universitario ogni anno aumenta il numero di corsi fruibili online comodamente da casa, infatti molti atenei propongono diverse offerte formative che prevedono la modalità e-learning dove le lezioni sono disponibili online nel sito del corso come video da ascoltare e seguire, senza obblighi di orari e spostamenti. Altro progetto interessante di e-learning fu il modello all'avanguardia dell'università a distanza del consorzio Nettuno, basato sull'erogazione di video-lezioni registrate, alcune delle quali andavano anche in onda a tarda notte sulla rete televisiva nazionale RAI3 inserita nel contesto del progetto RaiEducational. Tale modalità di distribuzione del sapere si sta trasformando anche nel nostro paese in un modello che guarda al connubio tra le tecnologie di rete e la tradizionale didattica d'aula come al luogo privilegiato della formazione, definito come modello blended dell'e-learning. Anche sul piano legislativo sono intervenuti provvedimenti tesi a regolamentare la disciplina del settore: il recente decreto che istituisce le università telematiche (D. M. "Moratti-Stanca" del 17 aprile 2003 pubblicato in G. U.

n. 98 del 29 aprile 2003), oltre a definire i criteri e le procedure di accreditamento dei corsi di studio a distanza, dispone anche in merito alle modalità di erogazione della didattica e alle specifiche tecniche per l'adozione di architetture di sistema in grado di gestire e dare accesso ai corsi di studio a distanza.

Capitolo 2

La scuola dopo il 2000 e la sfida del progresso tecnologico

Nella società del nuovo millennio la tecnologia è diventata pane di tutti i giorni per la grande maggioranza della popolazione. Tutti siamo permeati di tecnologia dalla mattina, quando spegniamo la sveglia impostata in base al giorno nel nostro smartphone, all'autobus che ci porta al lavoro dove acquistare il biglietto o registrare l'abbonamento si fa sempre dallo stesso smartphone, e tanti altri comportamenti che nel corso degli anni con l'aumentare delle possibilità e il diminuire dei costi, pian piano ci siamo trovati, spesso involontariamente, a modificare. Probabilmente in una moderna "Casa Vianello" la coppia oggi non si troverebbe più la sera a letto a leggere il giornale bensì a commentare, ognuno col proprio smartphone o tablet, le foto di facebook degli amici o a giocare a carte, rigorosamente online, con qualcuno che invece che essere a letto sta facendo colazione dall'altra parte del mondo. I nostri bambini oggi, lo si vede sempre più andando nei ristoranti, stanno a tavola educati e composti tenuti al guinzaglio dallo smartphone del genitore con il gioco; il pericolo maggiore adesso non è più che si facciano male nello scivolo arrugginito del locale, ma che si scarichi la batteria del device o che il bambino vada in internet e compia acquisti senza il controllo di un adulto. Tutto questo senza che nessuno abbia mai insegnato loro nulla di come questi "aggeggi" funzionino. Sanno fare e basta. Non hanno seguito lezioni, non hanno compiuto noiose e ripetitive esercitazioni, non hanno nella quasi totalità dei casi nemmeno dovuto disturbare il manuale delle istruzioni, sempre ammesso che nelle confezioni se ne trovi ancora uno. Oggi il mondo è un posto per gente "smart", che nei dizionari troviamo tradotto come intelligente, furbo, sveglio, brillante, spiritoso, rapido, veloce ma anche bello e alla moda. Le nuove generazioni sono "smart" tanto quanto le tecnologie lo sono, o è forse il contrario? Non è ben chiaro spesso quale dei due dipenda

dall'altro, se l'uomo dalla tecnologia o la tecnologia dall'uomo. E la scuola? La nostra scuola è tutto tranne che smart. Di fronte a questo radicale cambiamento messo in atto e subito dalla società, è palese come anche la scuola, e in particolare la figura dell'insegnante, debba assolutamente far parte di questo cambiamento.

2.1 Tecnologie per la didattica

Dire "tecnologie per la didattica" o "tecnologie didattiche", anche se sul profilo terminologico non sono espressioni troppo distanti tra loro, in realtà individuano i due lati della stessa medaglia. Per tecnologia didattica si intende "un insieme di sistemi, tecniche e strumenti soggetti a progettazione, sviluppo, applicazione e valutazione orientati a sostenere i processi di apprendimento, senza disdegnare l'apporto e la ricerca interdisciplinare di altre discipline come l'informatica, la psicologia cognitiva, la pedagogia"¹. Si parla di tecnologie per la didattica per indicare gli strumenti veri e propri che si utilizzano o che sarebbero sfruttabili nel settore didattico. Le tecnologie per la didattica fino agli anni novanta erano costituite prevalentemente da apparecchiature radio-televisive e dalle famose lavagne luminose per la proiezione di lucidi prodotti manualmente dagli insegnanti. Una lezione quindi statica, con una interattività pressoché nulla; fino a quando negli anni '90 i primi computer fecero l'ingresso nelle scuole, il più delle volte per una passione personale di qualche insegnante. Il progresso delle tecnologie e un insieme di buoni investimenti da parte dello stato ha portato, nel giro di una quindicina di anni, il computer in tutte le scuole italiane di tutti i gradi. Un passo importante per l'ingresso ufficiale dell'informatica vera e propria nel pianeta della didattica, fu la diffusione dell'ipertesto sul finire degli anni ottanta e in particolar modo verso la metà degli anni novanta.

Originariamente sperimentato alla fine degli anni '60, l'ipertesto è "la scrittura non sequenziale di un testo che si dirama e consente al lettore di scegliere il percorso preferito, un testo che, a differenza di tutti gli altri testi visti fino a quel momento, si fruisce al meglio davanti ad uno schermo interattivo. Così come è comunemente inteso, un ipertesto è una serie di brani di testo tra cui sono creati legami (links) che consentono al lettore differenti cammini"². Già in questa definizione è possibile ravvisare un cambio di pa-

¹Carmine Iannicelli - Interventi e riflessioni svolti all'interno del corso "Didattica con la LIM" Sessione 01/2011, tenuto per Anitel - Associazione Nazionale Tutor e-Learning (<http://www.anel.org>)

²T.H. Nelson, *Literary Machines 90.1*, Mindful Press, Sausalito (trad. It., *Literary Machines 90.1. Il progetto Xanadu*, Muzzio, Padova, 1992)

radigma: non più l'insegnante, bensì lo studente, tramite i link ha il potere e la possibilità di gestire il proprio percorso formativo su un dato argomento a seconda della mappa concettuale che andrà a creare nella propria e personale cronologia di navigazione dell'ipertesto, creando così una propria qualità e logica della conoscenza che risulterà differente per ogni fruitore del medesimo ipertesto. Questo nuovo linguaggio pedagogico ha avuto dunque il potere di dare una prima "spallata" al primato del libro di testo. Con l'avvento di internet e del web 1.0 paragonabile ad un immenso ipertesto per la modalità di fruizione, questo modello di creazione di conoscenza viene a determinarsi come uno dei più importanti probabilmente dall'invenzione della radio. Grazie ad internet e alla possibilità di lavorare sul medesimo argomento in più persone e in diversi luoghi anche contemporaneamente, ma soprattutto grazie alla possibilità di scambiarsi enormi quantità di dati ad una velocità e con una facilità prima impensabili, e grazie alla multimedialità concessa dal progresso incessante della tecnologia informatica, oggi ci troviamo davanti ad una rivoluzione che non può non modificare profondamente anche la scuola.

Di cosa ha bisogno, dunque, la scuola per essere ancora il centro focale dell'apprendimento e della formazione nel XXI secolo? Di infrastrutture, certamente, di formazione continua, naturale, di saper riflettere sul cambiamento che i nuovi media stanno producendo in noi stessi prima ancora che negli studenti, ovvio, di essere in grado di gestire il cambiamento. Ecco il punto cruciale: saper gestire il cambiamento. Perché è indubbio, oltre che innegabile, che un cambiamento epocale stia attraversando non solo e non tanto i banchi di scuola, ma il modo stesso di apprendere da parte delle nuove generazioni, oltre che naturalmente dei docenti.

I docenti da sempre hanno avuto dalla loro parte il vantaggio di inserirsi in un quadro già sperimentato di persona, ovvero la spiegazione della lezione e lo studio su un libro. Da qualche anno questo paradigma ripetitivo si è incrinato e, mentre fino ad oggi a cambiare tra una generazione e l'altra di insegnanti erano quasi solamente i libri di testo, e nemmeno sempre, oggi troviamo nelle classi insegnanti che fino a qualche anno prima hanno studiato e insegnato in modo, per così dire, tradizionale con libri quaderni e in alcuni casi con l'ausilio di un vecchio PC, e oggi si trovano catapultati in aule cosiddette 2.0 con tablet, computer ovunque, libri dematerializzati, LIM e tante altre tecnologie. Soprattutto però questi insegnanti si trovano di fronte una platea di giovani che non sono più le tabule rase che erano i bambini degli anni '80 e '90, con piccole menti da costruire sviluppare e plasmare partendo da zero come quando egli stesso era approdato sui banchi di scuola proveniente da un asilo in cui buona parte del tempo si trascorrevano fuori a giocare a calcio e nascondino; i nuovi studenti sono nati con la tecnologia in mano e nella maggior parte dei casi la sanno utilizzare molto meglio degli insegnanti stessi

senza che nessuno gli abbia spiegato come si fa, e questo spesso non è detto che sia un fattore positivo. Dunque è evidente che come la società evolve verso un utilizzo spasmodico e a tutto tondo della tecnologia, anche le istituzioni cardine di uno stato devono seguire il cambiare delle consuetudini di chi lo abita, così la scuola e chi ne fa parte dovranno cedere una buona parte della loro rigidità e lasciare entrare le tecnologie come e-learning, e-book, tablet e smartphone, Wi-Fi, computer laptop e LIM e imparare non solo a convivere ma anche ad utilizzarle in maniera costruttiva per il futuro dei nostri giovani, che non dovranno dimenticare da dove si viene ma dovranno avere un occhio attento sul futuro.

2.2 La formazione del corpo docente

Forse la più grande sfida che il mondo scolastico deve affrontare non è tanto l'adeguamento delle aule e degli istituti alle nuove metodologie didattico-tecnologiche, bensì la ri-formazione del corpo docente all'utilizzo delle nuove tecnologie non fine a se stesse ma come mezzo principale per condurre la propria classe verso la conoscenza. Certo in molti si districano già abbastanza bene con un computer e con internet, tantissimi avranno per le mani uno smartphone, ma quanti sanno andare oltre a puntare una sveglia telefonare ricevere messaggi o segnare un appuntamento nell'agenda? Con il nuovo millennio una nuova spesa deve essere assolutamente affrontata dallo stato. Ammodernare, per non dire creare, le competenze digitali dei docenti in alcuni casi, come piace agli studenti apostrofarli, rimasti all'età della pietra.

2.2.1 Il ForTIC

Mentre sul piano dell'equipaggiamento il PSTD aveva portato in quasi tutte le scuole computer e internet, anche se molto lontani dai requisiti minimi prefissati, resiste da parte dei docenti una forte avversione verso l'utilizzo dell'ambiente tecnologico come terreno di apprendimento e di lavoro cooperativo ed un rifiuto pressoché totale nei confronti di modelli didattici innovativi che facessero uso di strumenti informatici. Complice anche una tecnologia ancora acerba sotto questo punto di vista ma anche l'abitudine di relegare le apparecchiature in laboratori appositamente studiati anziché integrarli già nelle aule.

Nel 2002 il Ministero dà il via al FORTIC ovvero il Piano Nazionale di Formazione degli Insegnanti sulle Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione, il quale si articola su tre pilastri principali: formare i docenti in ambito tecnologico; raggiungere il maggior numero di insegnanti (furo-

no circa 180 mila) offrendo a tutti pari opportunità formative; aggiornare e formare il personale della scuola nonché avviare una capillare formazione sulla nuova riforma della scuola (legge Moratti). La novità del piano è che fu attuato su tre livelli formativi a didattica mista, composta cioè sia da didattica in presenza che a distanza e con percorsi di autoapprendimento, il tutto seguito da tutor esperti in rete e gestito dalla piattaforma Puntouedu. Le tre tipologie di percorso sono state calibrate per dare una formazione adeguata agli insegnanti completamente digiuni di tecnologie, a formare docenti già attivi tecnologicamente per trasformarli in esperti di metodologie delle risorse didattiche messe a disposizione dalle ICT, o a preparare figure responsabili delle risorse informatiche e telematiche della scuola o di infrastrutture telematiche tra più istituti.

2.2.2 EPICT, o Patente Pedagogica Europea per le ICT

Al termine del programma FORTIC ci si rese conto che una formazione fine a se stessa e in uno spazio temporale definito, non poteva essere sufficiente per un corpo docente spesso digiuno di tecnologia. Soprattutto non poteva essere sufficiente formare docenti che poi si sarebbero trovati in plessi scolastici ancora non in grado di offrire un adeguato grado di tecnologizzazione. Inizialmente si cercò di sfruttare il programma europeo ECDL per convogliare su una struttura già attiva una formazione adeguata per lo meno a livello base di tutti i lavoratori del comparto scuola. Con diversi bonus forniti da enti o dalle stesse scuole e nella maggior parte dei casi su base volontaria, molti insegnanti hanno conseguito alcuni moduli del programma ECDL. Questo però è un progetto generico, ovvero non indirizzato specificatamente al mondo della didattica. Gli insegnanti imparano semplicemente ad "usare il computer", non ad "usare il computer per insegnare", e la differenza è notevole.

Sul modello ECDL venne sviluppata, in ambito europeo, la certificazione EPICT ovvero la patente pedagogica europea per l'utilizzo in classe delle tecnologie della comunicazione e dell'informazione. Tramite diversi enti certificatori, non solo a livello europeo, e con una didattica ibrida organizzata in moduli, gli insegnanti possono qui imparare com'è possibile insegnare utilizzando attivamente le tecnologie. La certificazione va ad influire positivamente anche nel curriculum personale del docente. A marzo 2016 il DIBRIS, Laboratorio di E-Learning & Knowledge Management presso l'Università degli Studi di Genova, ha pubblicato il nuovo syllabus della certificazione EPICT³

³Il syllabus completo della certificazione EPICT 2016 è disponibile online all'indirizzo <http://www.epict.it/sites/default/files/Syllabus-EPICT.pdf>

il quale indica tra le competenze da acquisire, la capacità di imparare tramite internet, quindi conoscendo la logica della rete e il modo in cui si conduce una ricerca online, comunicare con le immagini e la grafica digitale e apprendere le basi della tecnica dell'infografica, analizzare la realtà tramite la raccolta e l'analisi di dati o la creazione e l'analisi di grafici, comunicare ed esprimersi con l'ausilio di presentazioni digitali e saper sfruttare e contribuire negli ambienti del web come blog e forum. Non solo, ma anche la capacità di sperimentare in ambienti di simulazione, progettare l'innovazione scolastica acquisendo strumenti adeguati per diventare o assistere l'animatore digitale, saper utilizzare gli ambienti tecnologici per consentire agli studenti in difficoltà di superare le barriere, implementare il pensiero computazionale e la creatività con progetti di coding, giochi e robotica educativa, includere nella formazione dei ragazzi i supporti multimediali disponibili anche per insegnare come essi vadano correttamente utilizzati in futuro, fare didattica con la LIM. Tutto questo ovviamente deve essere fatto in regime di e-safety, cioè conoscendo i metodi per sviluppare la didattica digitale in totale sicurezza sia per le macchine sia per le persone, e ovviamente con l'accortezza di utilizzare anche modalità di apprendimento in mobilità? tramite tablet e smartphone quando possibile.

2.3 Oltre il PC: LIM, cl@sse 2.0 e insegnanti

I progressi tecnologici hanno compiuto passi da gigante nell'arco di pochi anni. Dai computer comandabili solo a riga di comando con istruzioni spesso in un linguaggio troppo diverso dall'italiano, siamo passati in pochi anni a potenze di calcolo enormi e applicativi a tutto tondo fruibili in dispositivi minuscoli come un orologio. Nella scuola di oggi troviamo computer, internet, dispositivi portatili, proiettori e sistemi audio di qualità. Solo la lavagna resiste stoicamente al passaggio delle epoche. Quel sottile strato di ardesia ancora amato dai professori e ancora odiato dagli studenti. Ma anche per la lavagna è arrivato il momento di un restyling.

Combinando lo strumento tradizionale con la vecchia lavagna luminosa che fino agli anni '90 proiettava i lucidi sul muro, ma anche con proiettori, computer, internet e moderni sistemi touch-sensitive, otteniamo la Lavagna Interattiva Multimediale (LIM). Questo sistema combina un proiettore possibilmente posto in alto e con una bassissima distanza focale, una superficie di proiezione (che nei modelli più aggiornati è sensibile al tocco di più dita contemporaneamente mentre nei modelli meno recenti necessita di "penne" apposite) e un software che colleghi questo dispositivo ad un pc che funga da "cervello". Questa nuova figura ibrida che fa convergere in sé la potenza

elaborativa di un computer, la facilità di utilizzo di un tablet e la fruibilità contemporanea dei contenuti a tutta una classe, esprime tutto il potenziale che la multimedialità può dare alla scuola 2.0. Con la LIM può dirsi inaugurata una nuova stagione dell'insegnamento orientato al *learning by doing* in un'ottica finalmente davvero trasversale e interdisciplinare. Da non sottovalutare anche l'aspetto interattivo della LIM che ha il potere di calamitare l'attenzione dei ragazzi sollecitandone attenzione e coinvolgimento e, con la lavagna che si trasforma in una finestra sul web, di allargare i confini comunicativi oltre le quattro mura dell'aula.

L'introduzione della LIM, come già accennato⁴ è datata 2006 quando il Ministro della pubblica istruzione Giuseppe Fioroni ne ha annunciato l'ingresso a scuola in via sperimentale, inizialmente solo per alcuni istituti del centro-sud. L'iniziativa è stata poi ripresa, nell'ottobre 2008, dal ministro Maria Stella Gelmini che, all'interno di una prima bozza del futuro Piano Nazionale per la Scuola Digitale (PNSD), ha rilanciato il piano con l'obiettivo di portare nelle scuole italiane circa dieci mila lavagne interattive multimediali. Il servizio statistico del ministero afferma che nell'anno scolastico 2013/2014 le aule dotate di LIM erano il 29,3% su base nazionale, e sono cresciute fino al 41,9% nell'anno seguente⁵. Con il perpetrarsi del PNSD, anche attraverso La Buona Scuola, legge 107/2015, continua l'impegno del governo ad aumentare gli equipaggiamenti tecnologici delle scuole verso un teorico 100% programmato dalla Agenda Digitale Italiana 2020. Il piano decennale, facendo propri gli obiettivi della strategia Europa 2020, vuole avvicinare e modernizzare contemporaneamente l'intero apparato statale verso un futuro più sostenibile, intelligente e solidale, in una parola un futuro *user-friendly* abbracciando e interconnettendo in questo modello di crescita comune le sette priorità delineate dalla commissione europea: innovazione, economia digitale, occupazione, giovani, politica industriale, lotta alla povertà e uso efficiente delle risorse.

Per ottenere buoni risultati in questo percorso, però, è necessario sviluppare un piano che muova importanti passi su più fronti. Così a partire dal 2009 con l'azione Cl@sse 2.0, intrapresa dal MIUR nell'ambito del PNSD, ben 416 classi di ogni ordine scolastico hanno preso parte alla sperimentazione per l'identificazione di modelli sostenibili di classe per la scuola del domani, nell'ottica di sviluppare non solo un nuovo modello, ma proprio una nuova categoria di scuola del futuro. Questa sperimentazione ha portato la migliore tecnologia disponibile fino ad oggi, nelle aule scolastiche al servizio di studenti ed insegnanti. Le classi in questione hanno quindi a disposizione

⁴cfr. capitolo 1 paragrafo 1.5

⁵Fonte: MIUR, Ufficio statistica e studi

LIM, computer, tablet, internet ad alta velocità, software multimediali completi ed in continuo aggiornamento, il tutto ovviamente monitorato nell'arco di un triennio per poter studiare l'impatto delle ICT nei processi formativi degli studenti.

Dunque la lavagna dopo il restyling è diventata una LIM, il libro ora è finito sul tablet e si chiama e-book, le classi sono 2.0. Ma gli insegnanti? Non dobbiamo dimenticare che il più grande patrimonio del sistema scolastico italiano sono proprio gli insegnanti, troppo spesso non apprezzati quanto meriterebbero e sempre più sovente sminuiti nel loro orgoglio e nella loro professionalità. Il nostro corpo docente racchiude tutta la cultura della nostra storia, ha studiato nella patria dei più grandi studiosi dell'antichità, e riscuote merito in ogni parte del mondo. Ha in mano il destino del nostro paese per mano della cultura che saprà trasmettere ai nostri figli. Nel mondo dei tablet e della multimedialità, però, la sua conoscenza per quanto vasta possa essere, entra in conflitto con un mondo nuovo, che in molti casi lo ripudia e lo etichetta come antico. Il maestro di oggi, dunque, deve acquisire una nuova professionalità con competenze specifiche, chiaramente delineate dall'impianto normativo. Essi dovranno arricchire le proprie capacità comunicative, linguistiche, organizzative e soprattutto tecnologiche e dovranno essere in grado di seguire interpretare e, magari, essere sempre un passo avanti rispetto ai cambiamenti con cui la nuova scuola li sfiderà a confrontarsi. Se fino a qualche decennio fa il docente, una volta ottenuta l'abilitazione, aveva tutte le carte in regola per svolgere indisturbato il proprio operato probabilmente fino al momento della pensione, oggi non può più essere così. In una società dove tutto cambia a ritmi velocissimi, l'insegnante non può più rimanere immobile per anni ancorato ai suoi sistemi, deve evolversi continuamente lungo tutto l'arco della propria vita lavorativa muovendosi lungo la *lifelong learning strategy* che lo porterà ad aggiornarsi continuamente non tanto sotto il profilo culturale, quanto sulle tecniche utili a svolgere il suo compito nel migliore dei modi, ovvero quello che farà dei nostri figli dei veri cittadini del mondo.

Eppure, nonostante i docenti costituiscano il capitale più prezioso del nostro sistema scolastico, essi sono anche l'elemento che più di ogni altro riesce ad ostacolare il passaggio dalla vecchia scuola alla scuola 2.0. Gli insegnanti spesso rimangono ancorati al sistema di insegnamento unidirezionale tradizionale resistendo al nuovo, interponendo freni alla trasformazione. Le motivazioni possono essere molteplici, a cominciare dal fatto che un insegnante al quale mancano, ad esempio, 10 anni alla pensione ha insegnato in maniera tradizionale per 25 anni dopo esser stata o stato a sua volta allievo o allieva in una scuola interamente improntata sul paradigma monocratico maestro-allievo, magari anche con una certa severità e imposizione. Inoltre

può capitare spesso che ciò che durante la loro formazione viene presentato come uno strumento alla portata di tutti e infallibile, poi nella realtà delle scuole non sia presente, non funzioni o non riceva l'adeguata manutenzione e quindi si veda costretto a tornare al vecchio sistema aggiungendo, oltre al danno la beffa, lo sdegno e il malcontento che si crea nella classe. Questa resistenza al cambiamento, per certi versi anche giustificabile, contribuisce innegabilmente alla crisi in cui versa la professionalità del docente, alimentata nel tempo dall'inadeguata risposta del nostro paese alle problematiche emerse nel tempo, e che oggi annichilisce una categoria che ovviamente non può che risultare spesso scarsamente apprezzata dalla società. Per spezzare una lancia a favore del corpo docente si può citare Biondi che in "La scuola dopo le nuove tecnologie" afferma che "il lavoro principale per gli insegnanti è insegnare. Poco o pochissimo tempo può essere dedicato all'apprendimento. Questo aspetto insieme alle continue pressioni, emergenze, scadenze alle quali è sottoposto oggi un insegnante, rappresenta l'ostacolo maggiore al cambiamento, la barriera maggiore all'adozione di nuove modalità di integrazione delle ICT nell'educazione"⁶.

Pur con le tante difficoltà e le rimostranze dimostrate dagli insegnanti, le tecnologie devono essere introdotte ed utilizzate. Per cercare di facilitarne l'accettazione e l'adozione, insieme all'azione LIM il ministero ha previsto anche un'azione di formazione per i docenti che sono stati quindi sostenuti nello svolgimento delle attività con un sistema di accompagnamento e supporto; iniziativa gestita dalle piattaforme ANSAS-INDIRE⁷. Durante questa fase, tramite un supporto *on the job* declinato in azioni di *tutoring & coaching*, si sono formati più di 350 mila docenti di ruolo e più di 10 mila neoassunti. Inoltre tramite i portali dedicati è ancora disponibile e costantemente aggiornata sia l'azione di formazione che quella di supporto inteso sia come supporto tecnico che come supporto didattico che di distribuzione di materiale. L'azione capillare messa in atto dal ministero sta accompagnando i docenti nella loro modernizzazione, sviluppando le capacità di interconnettere l'approccio tradizionale, che considera la conoscenza nel suo aspetto sequenziale settoriale e ordinato, con quello multimediale e reticolare concesso dalle tecnologie. Si

⁶Giovanni Biondi, presidente dell'INDIRE dal 2013. Fonte: "La scuola dopo le nuove tecnologie", Biondi, Apogeo 2007.

⁷Istituto Nazionale di Documentazione per l'Innovazione e la Ricerca Educativa (Indire) che con la Legge 296/2006, diventa Ansas, Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica. Dal 2012 viene ridenominato INDIRE secondo il Dl. 98/2011 convertito con modificazioni dalla Legge 111/2011. INDIRE, INVALSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e Formazione) e Corpo Ispettivo del MIUR fanno parte del Sistema Nazionale di Valutazione in materia di istruzione e formazione.

può concludere dunque che le ICT potranno considerarsi efficaci se e solo se tutta la scuola, e per primi i docenti, sapranno conciliare nel modo giusto saperi e media.

2.4 Il Piano Nazionale Scuola Digitale (PNSD)

Preso atto che i dati OCSE descrivono l'Italia ancora in grande ritardo rispetto alla media UE per quanto riguarda la modernità dell'istituzione scolastica, il MIUR ha dato inizio ad un percorso teso alla modernità e al potenziamento del comparto scuola, il Piano Nazionale Scuola Digitale, iniziato nel 2007 con la prima fase e perpetrato negli anni fino all'approvazione della terza fase nel luglio 2015. Questo mira a rendere la scuola un laboratorio dove sperimentare l'avanzamento digitale e l'innovazione tecnologica. Obiettivo principale è la modifica degli ambienti attraverso cui passerà il nuovo modello di didattica; così dal 2008 al 2012 si introducono le LIM nelle classi, si stilano le prime procedure per realizzare prima le Cl@ssi 2.0 e poi le Scuole 2.0. Ma procediamo con ordine.

La prima fase del PNSD inizia nel 2007 per mano dell'allora Ministro Fioroni e viene affidata nel suo svolgimento pratico all'istituto INDIRE. L'azione LIM comincia nel 2008 e prevede la diffusione capillare della Lavagna Interattiva Multimediale. Con questa azione sono state assegnate, secondo i dati pubblicati dal MIUR, 35.114 LIM grazie ad uno stanziamento complessivo di 93.354.571 euro, di cui 80.937.600 euro per l'acquisto di LIM e 12.416.971 euro per la formazione di 72.357 docenti all'uso sia tecnico che didattico delle lavagne. Nel 2009 vengono create le prime Cl@ssi 2.0 ovvero la realizzazione di laboratori direttamente all'interno delle classi, per offrire agli studenti nuovi e stimolanti ambienti di apprendimento. Dal 2009 al 2012 il progetto ha trasformato 416 classi di ogni ordine per un finanziamento complessivo di 8.580.000 euro speso nell'acquisto di dotazioni all'avanguardia e di 1.944.857 euro per il supporto e la formazione dei docenti impegnati nella progettazione e nella didattica all'interno della sperimentazione Cl@ssi 2.0. La terza azione della prima fase del PNSD, quella dedicata all'Editoria Digitale Scolastica, comincia nel 2010 per realizzare contenuti digitali in 20 istituti scolastici con un finanziamento di circa 4.400.000 euro. Altri accordi sono stati sottoscritti nel 2012 per investimenti ulteriori di 33 milioni di euro e hanno consentito di assegnare ulteriori 1.931 LIM, formare 905 Cl@ssi 2.0 e 23 Scuole 2.0.

Nella seconda fase del PNSD in atto dal 2012 al 2014, il programma di formazione è stato riformulato per una migliore distribuzione territoriale e una maggiore flessibilità che consenta di adeguare la strategia in corso d'opera

alle diverse necessità formative e di supporto alle azioni ancora in corso e previste per il futuro. "L'obiettivo primario è quello di valorizzare le risorse esistenti e rendere economicamente e logisticamente sostenibile una formazione adeguata ai nuovi numeri del PNSD"⁸.

La terza fase del Piano è iniziata con l'approvazione del decreto ministeriale 851/2015 da parte del Ministro Giannini e che proseguirà fino a compimento dell'opera nel 2020. Questa fase è stata suddivisa in nove ambiti di lavoro ognuno dei quali è composto da diverse azioni. I 9 ambiti di lavoro sono: accesso alla rete, spazi e ambienti per l'apprendimento, identità digitale, amministrazione digitale, competenze degli studenti, digitale imprenditorialità e lavoro, contenuti digitali, formazione del personale, accompagnamento.

2.4.1 Il PNSD in nove ambienti di sviluppo

Il primo ambiente vuole fornire a tutte le scuole le condizioni per l'accesso alla società dell'informazione attuando ciò che anche l'UE ha riconosciuto come un vero e proprio "Diritto a Internet". Il secondo ambiente si preoccupa degli spazi e degli ambienti per l'apprendimento che dovranno essere potenziati con soluzioni infrastrutturali leggere, sostenibili ed inclusive. Questo obiettivo si realizzerà tramite la trasformazione dei laboratori scolastici in luoghi per l'incontro tra sapere e saper fare, ponendo al centro l'innovazione e cambiando la concezione di didattica da trasmissiva ad attivamente flessibile. Sempre parte di questo secondo ambiente è l'edilizia scolastica che avrà il delicato compito di allineare le strutture esistenti con l'evoluzione della didattica ristrutturando la scuola come interfaccia educativa aperta al territorio, all'interno e oltre gli edifici scolastici. Il terzo ambito d'azione del terzo momento del PNSD vuole creare l'identità digitale del cittadino partendo proprio dalla scuola. Gli obiettivi sono quindi quelli di creare un profilo digitale unico ed univoco ad ogni persona nella scuola in coerenza con il sistema SPID (Sistema Pubblico Integrato per la gestione dell'Identità Digitale che vuole avvicinare il cittadino alla PA dandogli la possibilità di gestire in modo digitale l'intero rapporto con lo stato). Direttamente collegato al terzo ambito è il quarto riguardante il completamento e il potenziamento dell'amministrazione digitale scolastica e del rapporto di questa con studenti famiglie stato e imprese. Alle competenze specifiche che dovranno essere sviluppate dagli studenti è dedicato il quinto ambiente. Qui gli obiettivi fissati sono la definizione di una matrice comune di competenze digitali, fornire un sostegno immediato ai docenti nel loro nuovo ruolo di facilitatori di percorsi didattici innovati-

⁸<http://www.agid.gov.it/agenda-digitale/competenze-digitali/piano-nazionale-scuola-digitale/piano-formazione-docenti>

vi, definendo insieme, non imponendo, strategie didattiche per potenziare le competenze chiave. Secondo il sesto ambito d'azione digitale imprenditorialità e lavoro dovranno, nel più breve tempo possibile, colmare il digital divide, sia in termini di competenze che di occupazioni, che caratterizza particolarmente il nostro Paese promuovendo carriere in ambito "STEAM" (Science, Technology, Engineering, Arts & Maths). Di fondamentale importanza sarà qui lo sviluppo di un nuovo e strettissimo rapporto tra scuola e lavoro che dovrà coinvolgere gli studenti come leva di digitalizzazione delle imprese. La scuola digitale dovrà saper promuovere la creatività, l'imprenditorialità e il protagonismo degli studenti nel quadro della valorizzazione delle competenze chiave con l'aiuto di contenuti digitali, il settimo pilastro del PNSD, come gli e-book e tutta l'editoria digitale, oggetto di un decreto ministeriale ad hoc. Per creare perfetti studenti digitali, però, è necessario in primis rafforzare la preparazione del personale scolastico in toto, non solo docente, in materia di competenze digitali promuovendo il legame tra innovazione didattica e tecnologie digitali. Di questo si occupa l'ottavo gruppo di azioni che andrà altresì a sviluppare standard efficaci e sostenibili per la lifelong learning strategy. Il Piano conclude con il nono segmento dedicato all'accompagnamento delle scuole nel percorso di crescita. Il MIUR, per mano degli enti collegati, dovrà vigilare sull'attuazione di ogni azione, stando attento a mantenere il più possibile l'omogeneità su tutto il territorio nazionale, dovrà abilitare e rafforzare strumenti per la collaborazione intelligente di partner esterni alla scuola sulle azioni del Piano, monitorare a livello quantitativo e qualitativo l'intero implementarsi del Piano e rafforzare il rapporto tra il Piano e la dimensione scientifica del rapporto tra pianeta scuola e mondo digitale. Questo programma di rivoluzione epocale necessita di fondi. Le coperture utili a realizzare la terza fase del PNSD saranno, a detta del governo, i Fondi Strutturali Europei (PON Istruzione 2014-2020) e una parte dei fondi stanziati a copertura della legge 107/2015 (La Buona Scuola).

2.4.2 Lo stato dell'arte

Un'idea sullo stato dell'arte dal quale muove i primi passi il nuovo PNSD è dato dall'Osservatorio Tecnologico del MIUR, istituito nel 2000, che si occupa di raccogliere i dati sul processo di digitalizzazione delle scuole. L'ultima analisi disponibile al momento in cui si scrive è relativa all'anno scolastico 2014-2015 ed è stata articolata su 3 assi principali: dematerializzazione dei servizi come siti e portali, comunicazione scuola-famiglia, registro elettronico, gestione dei contenuti didattici multimediali; dotazione tecnologica dei laboratori e delle biblioteche in quanto a connessioni, computer, LIM e proiettori interattivi; dotazioni tecnologiche delle singole aule in particolare per

quanto concerne connessioni, devices fissi e mobili in dotazione a studenti e docenti, LIM e proiettori interattivi. L'Osservatorio rivela che nell'anno scolastico 2014-2015 il 70% delle classi italiane è on-line ma nella maggioranza dei casi con una connessione inadatta allo sviluppo di una completa didattica digitale, il 41,9% è dotata di LIM e il 6,1% di proiettore interattivo; i laboratori destinati alle tecnologie sono in totale 65.650 per una media di 7,8 per istituto, e di questi l'82,5% è connesso mentre il 43,6% è dotato di LIM e il 16,9% di proiettore interattivo. L'osservatorio ancora rileva che il 99,3% delle istituzioni scolastiche gestisce un proprio spazio in rete, il 58,3% utilizza forme di comunicazione scuola-famiglia online, il 69,2% usa il registro elettronico, il 73,6% utilizza il registro elettronico del docente e infine il 16,5% utilizza forme di gestione centralizzata LMS (Learning Management Systems quali ad es. Moodle) per la didattica e i suoi contenuti.

Capitolo 3

Software e linguaggi a supporto della matematica a scuola

In questo capitolo andrò ad analizzare l'uso effettivo di hardware e software con le rispettive funzionalità per l'insegnamento della matematica all'interno della scuola.

Quello che è stato visto dai primi pionieri nei calcolatori dell'epoca è il potenziale che questi potevano avere se utilizzati a scuola. L'apprendimento basato sui software è diverso dal tradizionale, è un apprendimento che per prima cosa va fatto proprio, e per questo si sono attuati corsi di aggiornamento per gli insegnanti in modo tale da far capire anche a chi era più titubante di altri, l'importanza che questo cambiamento può produrre nella società del futuro, a partire proprio dalla scuola.

È necessario far sì che i lavoratori possano essere dotati, oltre che di un'elevata competenza professionale, anche di autonomia e capacità di decisione. Occorre cioè che siano in grado di governare la complessità, di riuscire a legare e a connettere le conoscenze, a collegarle e a distinguerle al tempo stesso.

Nei primi anni '80, nelle scuole in cui stava pian piano entrando qualche calcolatore, si è iniziato ad utilizzare dapprima solo programmi per la scrittura pura e semplice, poi qualche anno più tardi arrivò anche in Italia, come eco del fenomeno americano, il linguaggio di programmazione Logo. Questo è stato ideato nel 1967 da Seymour Papert al Massachusetts Institute of Technology (MIT) e sperimentato poi in moltissime scuole americane e italiane. Logo venne utilizzato anche nelle scuole italiane come ausilio per la matematica, in particolare per la rappresentazione di figure geometriche attraverso comandi prestabiliti. In seguito vengono sfruttati anche i fogli di calcolo, molto spesso utilizzati ancora oggi, seppur integrati anche in altri software, per il problem solving, quindi per l'implementazione e la soluzione

di problemi matematici di natura algebrica, aritmetica, geometrica o analitica.

Un'altro programma che ha avuto molto successo in ambito didattico è Basic, un vero e proprio linguaggio di programmazione ideato nel 1967 il cui punto forte fu la semplicità dei comandi per l'implementazione di algoritmi. Di diversa natura è invece HTML, un linguaggio di programmazione ideato per creare le primissime pagine web e i tanto utilizzati ipertesti che potevano coinvolgere tutte le discipline scolastiche. Questo linguaggio veniva usato per creare pagine web, perciò non era solo fine a se stesso per l'implementazione di algoritmi, ma poteva essere utilizzato per la creazione di testi e di pagine grafiche internavigabili. In questi anni si sviluppa sempre di più il World Wide Web e i computers si diffondono anche tra le case, non solo negli uffici, così iniziano a comparire programmi "pronti" e completi come ad esempio micromondi, MatLab, Mathematica e Geogebra. Questi programmi sono utilizzati in campo matematico e fisico per molte delle loro funzionalità. Wolfram Alpha è invece un motore computazionale di conoscenza¹, un motore di ricerca online basato sul linguaggio di programmazione Wolfram, che restituisce risposte a calcoli direttamente online anziché restituire link di altre pagine.

Negli ultimi anni sono poi nati altri software per la programmazione ideati a misura di bambino, è il caso di Scratch e Code.org. Sono programmi che insegnano ai bambini a pensare e progettare con il pensiero computazionale attraverso l'uso di bolle colorate che rappresentano i codici, figure di cartoni animati o di personaggi di fumetti e videogiochi da far muovere, parlare, ballare. Vengono utilizzati sempre di più nella pratica didattica e anzi, sono stati inseriti nei curricula anche attraverso il progetto Programma il futuro promosso dal Miur in collaborazione con il Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica (CINI), che è parte integrante de La Buona Scuola.

¹Si autodefinisce "computational knowledge engine" nelle FAQ di www.wolframalpha.com e anche come risposta alla domanda "What are you?".

3.1 Logo

Logo è un linguaggio di programmazione creato da Seymour Papert² nel 1967 all'interno del Massachusetts Institute of Technology (MIT). Logo è stato ideato come uno strumento per favorire e migliorare l'apprendimento.

La sua diffusione ha avuto luogo soprattutto grazie al suo essere modulare, è infatti modificabile sia per estensione sia per flessibilità e il fatto di poter essere interattivo lo porta ancor più vicino al bambino che lo utilizza. La programmazione con il Logo veniva sempre immaginata in relazione al progetto da realizzare, che esso riguardasse la matematica, l'italiano, le lingue o la programmazione di assistenti robotici.

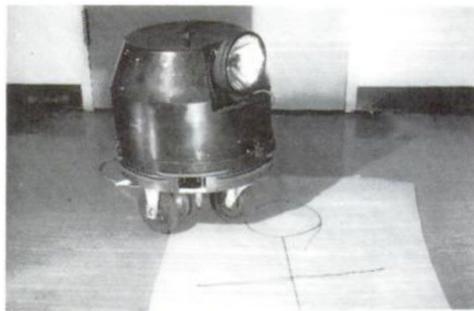


Figura 3.1: Tartaruga meccanica³

La Geometria della Tartaruga è stato il programma più utilizzato anche nelle scuole italiane. Inizialmente la Tartaruga era un robot che muoveva i suoi primi passi su di una superficie piana sotto la guida di istruzioni date da computer, questa poi grazie ad una punta che lasciava traccia simile ad una matita, disegnava le figure che venivano programmate dagli utenti. Pian piano divenne uno strumento solo grafico-tecnologico, quindi utilizzabile solo dalla grafica del computer e divenne quello che poi si diffuse in tutto il mondo come uno strumento utilissimo per l'apprendimento della geometria attraverso strutture di codici e programmazioni. Molto importante è anche l'aspetto rigoroso, infatti induce gli allievi ad un ragionamento per gradi nella tecnica di programmazione con l'utilizzo di termini specifici e costrutti matematici rigorosi.

²Seymour Papert è un matematico, informatico e pedagogista sudafricano naturalizzato statunitense. Ha lavorato con il pedagogista, psicologo, filosofo e biologo Piaget e, negli anni '60 si trasferì al MIT per unirsi al gruppo di lavoro che si occupava di Intelligenza Artificiale e in particolare lavorò in collaborazione con Marvin Minsky.

³Immagine: <http://www.logointerpreter.com/about/about-logo.php>

Nel corso degli anni '70 ha cominciato a diffondersi in diverse scuole statunitensi come integrazione all'insegnamento della matematica e dell'informatica; nel 1980 è nata la Logo Computer Systems Inc. (LCSI), che tuttora crea, sviluppa e commercializza le differenti versioni di Logo molto diffuse anche in Italia. Nello stesso anno Papert pubblica *Mindstorms*, un manuale in cui spiega e descrive in dettaglio le principali caratteristiche e le potenzialità di Logo e delinea le idee della pedagogia che lui definì costruttivista.

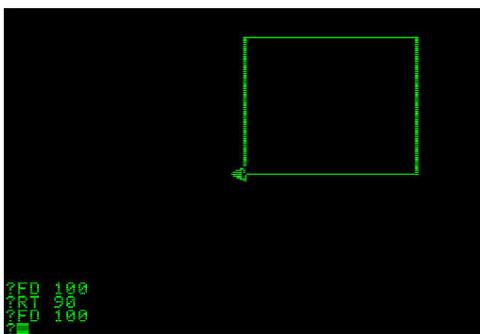


Figura 3.2: Esempio di utilizzo di Logo⁴

Nel corso degli anni '80 l'uso di Logo è andato sempre più aumentando anche nelle scuole italiane come sostegno ai corsi di matematica ed educazione tecnica. Negli stessi anni, negli Stati Uniti alla LCSI, venne introdotto anche il Logo Writer che, oltre al linguaggio di programmazione, include un word processor ed un'interfaccia grafica molto semplice ed intuitiva adatta ad un uso per utenti alle prime armi.

Un'altra innovazione di quegli anni e che ha avuto un discreto seguito fino ai nostri giorni è LEGOLogo. È stato progettato un sistema che sfrutta Logo come interfaccia per motori, luci e sensori incorporati nelle macchine costruite dalla LEGO. Questo progetto ha avuto talmente tanto seguito che molti insegnanti, soprattutto della scuola dell'infanzia hanno deciso di costruire dei progetti per attività scolastiche con LEGOLogo. Qualche anno dopo la LCSI crea *MicroWorlds*, conosciuto in Italia come *MicroMondi*, un programma che contiene al suo interno alcune modifiche rispetto al tradizionale Logo, infatti sono stati incorporati strumenti per disegnare, editor per le forme geometriche ed editor per melodie e grafica.

Successivamente il linguaggio Logo è stato anche incorporato in *HyperStudio*,

⁴Immagine: <http://social.technet.microsoft.com/wiki/contents/articles/29933.small-basic-the-history-of-the-logo-turtle.aspx>

un programma utile a costruire ipertesti multimediali, molto utilizzati nella scuola primaria e secondaria di primo grado nella anni '90.

In Italia sono presenti due aziende che hanno sviluppato dei programmi che sfruttano il linguaggio Logo, in particolare sono: la Sisco con Iperlogo e la Garamond con Micromondi.

Quello che veniva maggiormente sfruttato di Logo per la didattica, era la visualizzazione e soprattutto la costruzione grafica di figure geometriche da parte degli allievi. Molto importante era l'apprendimento del concetto di angolo per far sì che la tartaruga potesse disegnare a schermo quello che loro semplicemente disegnavano sul foglio con la matita. Una volta appresi i costrutti più semplici si possono costruire ambienti da ripetere più volte per la costruzione di oggetti in modo ricorsivo, come ad esempio la ripetizione di 4 volte dei soli due comandi avanti 120 e ruota di 90 per la costruzione di un quadrato. Via via esplorati sempre più comandi e ambienti, i bambini possono costruire immagini sempre più complicate e ridurre anche man mano il codice utilizzando le ricorsioni e i cicli. Davanti ad un errore il bambino in ambiente Logo, non è criticato ma incitato alla correzione, al debugging. Infatti questo fa parte del processo di comprensione di un programma, il bambino che programma è incoraggiato a studiare il bug, non a cancellarlo in fretta dalla sua memoria.

Una caratteristica molto utile ed importante della progettazione tramite il computer, è che alunno e docente collaborano assieme, quindi non ci sono gradi di autorevolezza ma collaborazione reciproca. Si presentano spesso situazioni nuove che nè l' insegnante nè il bambino avevano incontrato prima, così l'insegnante non deve fingere di non sapere. La collaborazione porta alla condivisione del problema e della soluzione da parte di insegnante ed alunno, in modo tale che quest'ultimo possa imparare dal primo imitandolo, non facendo quello che lui dice ma imitando i suoi movimenti e le sue azioni e cioè la sua ostinazione nel correggere l'errore e ragionarci fino alla completa soluzione.

In questo modo risulta evidente in che modo l'elaboratore può aiutare i bambini, tessendo un collegamento diretto con la matematica, un collegamento a volte più semplice rispetto alla lezione frontale. Questo porta talvolta a far apprezzare la matematica anche da chi non ne voleva nemmeno sentir parlare, sconfiggendo così la paura, molto spesso innata, della matematica. La geometria della tartaruga ha avuto il grande vantaggio di potersi adattare ai bambini, in modo che ognuno potesse farla propria poichè attraverso certi principi si può arrivare ad un concetto di matematica che può essere modificato e plasmato a proprio piacimento.

Esempio1

Un esercizio tipo che può essere proposto nella scuola primaria è la rappresentazione di un quadrato data la lunghezza del lato, in questo caso 120 "passi tartaruga".

Disegna un quadrato con il lato lungo 120. Fai attenzione all'ampiezza di ogni angolo.

Soluzione

Negli esercizi di questo tipo gli alunni devono fare molta attenzione a ricordarsi che nel quadrato ogni angolo è retto, quindi la tartaruga dovrà ruotare di 90 gradi sempre dalla stessa parte, quindi solo a destra o solo a sinistra, inoltre ogni lato dovrà avere la stessa lunghezza, 120. I comandi per risolvere l'esercizio sono i seguenti:

avanti 120 destra 90

avanti 120 destra 90

avanti 120 destra 90

avanti 120 destra 90

Questi comandi possono anche essere ridotti ad un unico comando con la funzione `ripeti`, cioè:

`ripeti 4 [avanti 120 destra 90]`

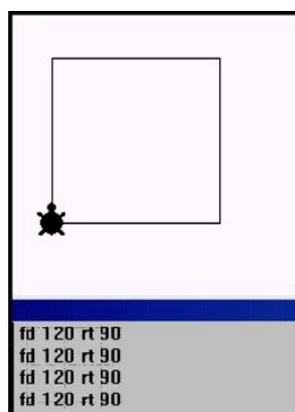


Figura 3.3: Rappresentazione di un quadrato con istruzioniLogo⁵

Un altro concetto molto importante su cui spesso in passato si è lavorato con Logo è quello di angolo. Infatti quando si utilizzano angoli di 90 gradi o 180 gradi, gli alunni devono solo fare attenzione a far ruotare la tartaruga a destra o a sinistra a seconda della figura prescelta, quando invece si vogliono

⁵Immagine: <http://www.billbelsey.com/?p=314>

disegnare figure un po' più complicate, l'attenzione deve essere maggiore.

Esempio2

Disegna un triangolo equilatero di lato 100. Ricorda che nel triangolo equilatero tutti i lati hanno la stessa lunghezza e tutti gli angoli hanno la stessa ampiezza.

Soluzione

In questo caso l'alunno dovrà studiare, anche tramite molte prove pratiche, come far girare la tartaruga in modo tale da avere 3 lati uguali e allo stesso tempo riuscire a chiudere il triangolo. Per costruire un triangolo equilatero dovrà far girare la tartaruga non di 60 gradi come invece faceva per il quadrato, bensì di un angolo supplementare a 60 gradi, quindi di 120 gradi, per tre volte, sempre dalla stessa parte. Così otterrà un poligono regolare, in particolare un triangolo equilatero di lato 100.

Le istruzioni saranno le seguenti:

avanti 100 destra 120

avanti 100 destra 120

avanti 100 destra 120 Riducendoli ad un unico comando:

ripeti 3 [avanti 100 destra 120]

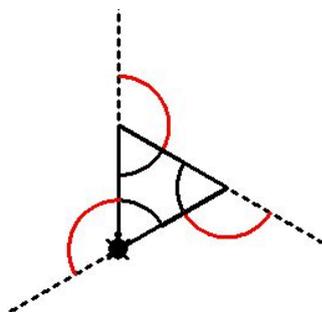


Figura 3.4: Triangolo equilatero conLogo⁶

Se questo tipo di esercizio viene inserito in un'attività didattica relativa all'unità sui poligoni regolari, si possono far disegnare agli alunni alcuni poligoni regolari e farli ragionare sull'angolo supplementare da far compiere alla tartaruga nelle differenti figure, fino ad arrivare a scoprire che l'angolo sarà esattamente uguale ad un angolo giro, diviso per il numero degli angoli interni al poligono. Arrivati a questo ragionamento si possono far disegnare alla tartaruga tutti poligoni regolari sempre con lo stesso comando *ripeti n [avanti 100 destra 360/n]* variando solo il valore n dei lati desiderati.

⁶Immagine: <http://www.jo-soft.it/logo.html>

Sperimentando le varie figure arriveranno così a disegnare un cerchio diminuendo sempre di più l'angolo e facendo diminuire il lato.

3.2 Excel

Cavallo di battaglia dell'azienda Microsoft è Excel. La prima versione di Excel (1.0) venne diffusa per Macintosh nel 1985, su imitazione di VisiCalc e Lotus 1-2-3, mettendo in pratica l'esperienza accumulata con MS Multiplan. Era un programma capace di sfruttare appieno la GUI del Mac e di gestire la maggior parte delle operazioni con mouse, cosa che in quel periodo poteva essere fatta solo nei computer Apple. Riscosse grande successo e arrivò a competere con Lotus, programma leader nel settore. Due anni dopo, venne rilasciata la versione per Windows, Excel (2) (la versione 1.0 non era stata diffusa), con questa versione arrivò nei pc IBM un programma che aveva tutte le caratteristiche della versione per Apple, con menù a tendina e che sfruttava il mouse. Nonostante tutto il leader rimaneva ancora Lotus, fino a quando, nel 1992 venne rilasciato Windows 3.1 con Excel 4 compreso nel pacchetto Office 4.0 che sfruttava a pieno tutte le caratteristiche peculiari del programma. Con questa versione riuscì a superare l'avversario e ad imporsi come software di riferimento nel mercato del foglio elettronico, incluso in un pacchetto più ampio e completo come Microsoft Office.

Seguono altre versioni via via più aggiornate e nel 1995 venne diffuso Excel 95, una versione totalmente rivoluzionata rispetto alle precedenti, pensata per l'integrazione di tutti i componenti presenti nel pacchetto e per sfruttare a pieno il sistema operativo Windows.

Negli anni successivi vengono apportate migliorie, senza troppi ulteriori stravolgimenti. Nel 2007 invece c'è un'innovazione, vengono inseriti i *ribbon*, strisce di comandi in vista, a sostituzione di menù a tendina, e anche altre funzionalità nuove per la presentazione e la gestione di dati. Con la versione del 2010 vengono definiti tutti gli aspetti innovativi della versione precedente e rilasciata una versione gratuita che va ad affiancare Word in Office 2010 nel pacchetto Works.

Nel 2013 vengono apportate ulteriori modifiche ma molto specifiche, indirizzate principalmente ad utenti avanzati. In questo anno una modifica molto particolare viene implementata, cioè il rilascio della versione touch per tablet e la possibilità di salvare su SkyDrive e OneDrive, con la conseguente possibilità di condividere il foglio di lavoro con altri utenti. Nell'ultimo anno sono stati introdotti altri miglioramenti nella versione per Mac con la completa implementazione delle *ribbon* anche per questo sistema operativo e una globale modernizzazione.

Dal punto di vista didattico Excel è stato usato già a partire dalla fine degli anni '80 come software di supporto alla matematica. In particolare vengono utilizzati i fogli di calcolo per la scrittura e soluzione di problemi matematici, per la soluzione di problemi o raccolte statistiche e la relativa costruzione di grafici esplicativi. Inoltre possono essere sfruttati per problemi di tipo algebrico e analitico come la soluzione di equazioni di secondo grado e lo studio di funzione. Infatti è un programma che ben si adatta all'insegnamento-apprendimento della matematica con le tecnologie grazie alle sue possibilità di elaborazione dati, di applicazione di funzioni, di esecuzioni di calcoli e creazione di grafici. Tutto ciò, unito alla possibilità di collegare una guida online con relativi messaggi per immettere dati e la possibilità di far apparire messaggi di errore, consente l'utilizzo di un approccio di tipo operativo per tradurre argomenti che concettualmente potrebbero risultare astratti, e anche la possibilità di suddividere i contenuti per gradi di difficoltà e l'individualizzazione di percorsi didattici. Non solo, i programmi in cui compaiono messaggi di errore in seguito a risposte errate da parte degli alunni, consentono l'utilizzo del software per verifiche formative in modo da ottenere un riscontro immediato su quali obiettivi sono stati raggiunti e quali no. È importante però che gli alunni non vengano lasciati in balia di se stessi o del programma perché si rischierebbe di far perdere loro l'obiettivo dell'utilizzo del software, si troverebbero a far prove a caso senza capirne il senso e senza compiere scelte consapevoli, invece con la supervisione costante e l'aiuto più o meno esplicito da parte dell'insegnante sarebbe sempre a fuoco l'obiettivo primario.

Esempio 1

Un esempio di utilizzo di Excel può essere la soluzione di problemi tramite un'equazione di secondo grado.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		EQUAZIONE DI SECONDO GRADO RISOLVENTE UN PROBLEMA									
3		In un rettangolo la misura h dell'altezza è data dalla differenza fra 2 e 1/4 della misura b della base.									
4		Le misure sono espresse in metri. Sapendo che l'area del rettangolo è di 3 metri, calcola le lunghezze possibili per la base e l'altezza del rettangolo.									
5											
6		base	b								
7		altezza	$2 - 1/4b$								
8		Area	$3 = b \cdot (2 - 1/4b)$	$3 = -1/4b^2 + 2b$							
9											
10		equazione da risolvere:	$1/4b^2 - 2b + 3 = 0$								
11			$b^2 - 8b + 12 = 0$								
12											
13		discriminante Δ	$= 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$	16	Il discriminante è maggiore di zero quindi ci sono due soluzioni reali distinte						
14											
15		soluzioni dell'equazione	$b_{1,2} = 1/2 \cdot (8 \pm \sqrt{16})$		$b_1 = 2$						
16					$b_2 = 6$						
17											
18		Soluzioni:	$b_1 = 2$	$h_1 = 1/2$							
19			$b_2 = 6$	$h_2 = 3/2$							

Figura 3.5: Soluzione di problema di secondo grado

Inoltre può essere utilizzato anche per la rappresentazione grafica di una equazione di secondo grado dove l'equazione viene scritta con le componenti in celle diverse in modo da poterle utilizzare per il calcolo delle ordinate nella tabella dei valori. Infatti queste si possono calcolare con una operazione tra celle utilizzando i coefficienti presenti nelle celle iniziali.

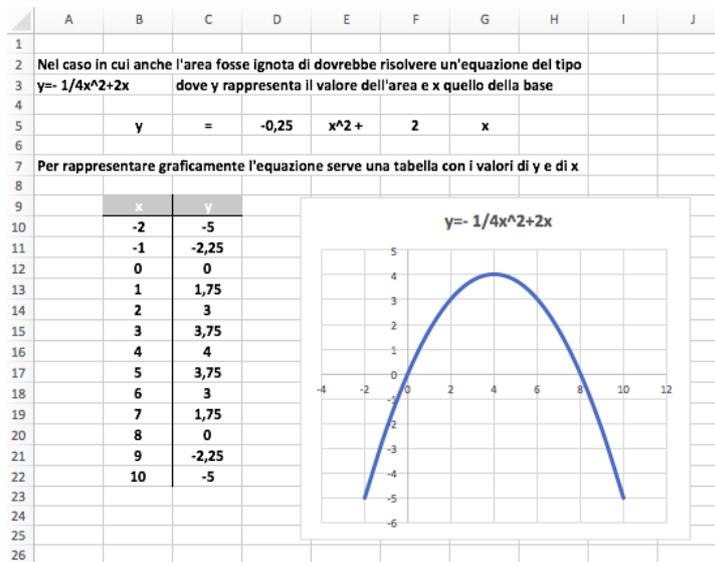


Figura 3.6: Rappresentazione grafica di un'equazione di secondo grado

Esempio 2

Nella scuola secondaria di primo grado, quando si affrontano le nozioni di base di statistica, il foglio elettronico potrebbe essere usato per l'organizzazione e la rappresentazione dei dati di una indagine statistica svolta dagli studenti come può essere quella sull'altezza di ogni alunno in una classe. Vengono raccolti i dati in una tabella e si calcolano media, moda e mediana.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ALUNNI	Sesso	Altezza (cm)								
2	Lucia	F	156		La Media Aritmetica						
3	Giada	F	158		somma valori altezze	2036					
4	Luca	M	147		numero di campioni	13					
5	Giacomo	M	160		media aritmetica	156,6154		{2036/13}			
6	Lorenzo	M	165								
7	Iris	F	154		funzione Excel	156,6154		"=MEDIA(C2:C14)"			
8	Giovanni	M	149								
9	Alex	M	161		La Mediana						
10	Alice	F	159		valori in ordine crescente	147; 148; 149; 154; 156; 157; 158; 159; 160; 160; 161; 162; 165					
11	Piero	M	162		termine centrale	158					
12	Carla	F	148								
13	Monica	F	157		funzione Excel	158		"=MEDIANA(C2:C14)"			
14	Federico	M	160								
15					La Moda						
16					valore e frequenza	147, 1	148, 1	149, 1	154, 1	156, 1	157, 1
17						158, 1	159, 1	160, 2	161, 1	162, 1	165, 1
18					valore più frequente	160					
19											
20					funzione Excel	160		"=MODA.MULT(C2:C14)"			
21											
22											

Figura 3.7: Esempio di esercizio di statistica con Excel

3.3 BASIC

BASIC è un linguaggio di programmazione ideato e sviluppato nel 1964 da John George Kemeny e Thomas Eugene Kurtz presso l'Università di Dartmouth nel New Hampshire. L'ideazione di questo nuovo linguaggio di programmazione fu dettata dall'esigenza di poter far eseguire ad un'unica macchina più processi contemporaneamente e più accessi da parte degli studenti che dovevano sottoporre ai computer i programmi da loro creati, così nacque BASIC, parola derivata dall'acronimo Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code, codice simbolico di istruzione polivalente per principianti. Negli anni ha poi subito varie modifiche e sviluppi in diverse versioni, come ad esempio Visual Basic e REALbasic, divenendo un linguaggio strutturato. Attualmente non viene quasi più utilizzato per via della scarsa velocità di sistema, nonostante ciò aveva il vantaggio di richiedere spazi di memoria molto brevi e l'editor per la stesura dei programmi era integrato nel software, quindi era adatto anche ad elaboratori con limitate risorse come quelli diffusi a metà degli anni '70.

Nel 1976 comparve una prima variante del linguaggio BASIC, un primo dialetto, il Tiny BASIC scritto da Bill Gates e Paul Allen. Tuttavia lo sviluppo di Altair BASIC decretò la vera diffusione del software. Per la commercializzazione di massa furono fondamentali le copie non autorizzate del programma che ammontavano quasi al 90% della totalità in circolazione. Inizialmente l'Altair 8800 possedeva l'esclusiva per la diffusione del programma ma, una volta scaduto il contratto, fu diffuso e commercializzato come Microsoft BASIC dalla Microsoft, fondata da Gates e Allen nell'anno di ideazione del programma, rendendolo disponibile anche per diverse piattaforme. Grazie alla disponibilità di una versione del programma per il sistema operativo CP/M, molto popolare in quegli anni, si ebbe una diffusione capillare di Microsoft BASIC, tanto che nel 1977 furono presentati il Commodore PET, l'Apple II e il Radio Shack TRS-80, home computer che avevano come linguaggio integrato proprio BASIC. In seguito molte versioni di questo linguaggio furono implementate ed ampliate, era semplice e diffusissimo a tal punto che comparvero dei codici di programmi in BASIC pubblicati in alcune riviste che potevano essere copiati dagli utenti per sperimentare nuove possibilità offerte dal software che molto spesso veniva eseguito direttamente all'accensione dell'elaboratore. In quegli anni vennero pubblicati molti manuali di listati in Microsoft BASIC.

Col passare del tempo si continuarono a sviluppare moltissimi linguaggi, tutti con base comune BASIC, che avevano anche estensioni in grado di gestire grafica, tipi di dati di vario tipo, supporto per le unità a dischi e le architetture per l'implementazione strutturata. Tutto questo portò alla creazione dei primi videogiochi per PC. Nonostante tutto però, a metà degli anni '80, si diffusero sempre di più programmi già completi, quindi gli utenti non avevano più bisogno di costruirsi il proprio programma imparando a programmare con linguaggi di programmazione ma passarono da creatori a soli utilizzatori, a volte anche passivi di programmi già completi. Fu un momento in cui diminuì notevolmente la diffusione e l'utilizzo di BASIC a favore di programmi *ready to use*.

Nel 1991 la Microsoft presentò Visual Basic, un linguaggio che, seppure manteneva il nome del precedente, era molto diverso dal suo predecessore ed era orientato principalmente agli oggetti e alla programmazione, l'unico punto comune con il precedente era la sintassi del linguaggio. Sebbene però il linguaggio fosse pressochè simile al predecessore, questo era utilizzato in maniera completamente diversa, infatti non serviva più per scrivere gli eventi, ma solo per gestirli attraverso dei widget che compongono l'interfaccia grafica.

Sulla scia di tutte le precedenti versioni del linguaggio implementate durante il corso degli anni, anche dopo l'uscita di Visual Basic comparvero altri

dialetti BASIC per tutte le piattaforme attualmente in commercio e molti di questi sono stati rilasciati opensource.

BASIC era stato ideato come un linguaggio semplice e per questo utilizzabile da tutti, indirizzato per lo più alla programmazione di algoritmi tramite poche e semplici istruzioni. Uno dei suoi punti di forza, oltre alla semplicità di sintassi, era la facilità di trasportabilità da un elaboratore all'altro. È stato ideato e realizzato come linguaggio compilato, ma molte versioni sfruttano interpreti.

Per quanto concerne la didattica, questo linguaggio può essere sfruttato per la creazione di veri e propri programmi dai tipi più disparati, da quelli di natura matematica, letteraria o ludica. Una volta studiata la sintassi del codice e apprese le regole basilari del programma, possono essere creati ad esempio dei semplici programmi per generare numeri casuali, oppure programmi che fattorizzino un numero dato in input, gestendo anche la possibilità di fare la stampa dei fattori attraverso tasti dedicati oppure anche la creazione di vere e proprie calcolatrici con tutte le funzioni desiderate e una sorta di rullino di carta dove rimangono visualizzate tutte le operazioni. Quello che credo sia l'aspetto più interessante di tutti è il poter far creare ad ogni studente un mini programma che abbia determinate specifiche predefinite e una grafica implementata a piacere dall'alunno e che questi possano poi essere fruibili da tutti i compagni. In questo modo si può attuare una condivisione comune di tutti i lavori svolti dai compagni, con i codici a disposizione di tutta la classe per far sì che ognuno possa arricchire le proprie conoscenze e l'utilizzo della sintassi non solo grazie all'esperienza personale, ma anche grazie all'aiuto e alla collaborazione dei compagni.

3.4 Pascal

Pascal è un linguaggio di programmazione che vide la luce nel 1970 quando Niklaus Wirth, professore e ricercatore in Svizzera di tecnologia, si cimentò nella creazione di un linguaggio che fosse adatto alla didattica ma anche dotato di strutture dati avanzate, dato che BASIC in quei primi anni di utilizzo non ne era fornito, sfruttando come punto di partenza il linguaggio di programmazione ALGOL. L'idea principale di Wirth era quella di creare un linguaggio che spronasse gli studenti a studiare bene il problema che avevano davanti prima di buttarsi a capofitto sul codice. Creò così un linguaggio strutturato completo ed efficiente che induceva lo studente/utente ad utilizzare una buona tecnica di scrittura del codice e a studiare il problema prima di scriverne il codice e lo dedicò al matematico e filosofo francese Pascal. Nel 1970 ci fu la prima implementazione del linguaggio, ma la diffusione vera e

propria iniziò tre anni dopo, con la commercializzazione del manuale "Pascal User manual and report", inoltre, grazie alla realizzazione da parte di Wirth di un compilatore multiplatforma in grado di funzionare in molteplici ecosistemi, ebbe la sua espansione maggiore nei primi anni '80 quando divenne un vero e proprio standard internazionale sia nella didattica sia a livello commerciale. Nonostante fosse continuamente aggiornato e ottimizzato dal suo creatore, ben presto però perse sempre più di popolarità, conseguenza della diffusione di linguaggi moderni e soprattutto dell'entrata in scena del sistema operativo Windows nel 1985. Così col passare degli anni perse sempre più popolarità a favore di programmi già pronti e a sé stanti che non erano da programmare ma solo da utilizzare, con la relativa diffusione di sempre più fruitori e meno creatori.

La novità che introdusse Wirth con questa sua creazione fu quella di creare meccanismi e concetti al di sopra degli array, che fanno sì che gli sviluppatori abbiano la possibilità di definire strutture dati complesse quali strutture dati dinamiche e per la ricorsività come alberi, liste e grafi. Questo è possibile grazie ad un codice molto rigido richiesto dal linguaggio per ogni programma, infatti ogni variabile deve essere dichiarata ad inizio stesura e non può cambiare tipo, se viene definita di tipo numerico, non potrà diventare di tipo carattere. Con la sintassi rigida e definita in ogni minimo dettaglio, non lascia spazio a fraintendimenti delle variabili in gioco. È inoltre possibile l'utilizzo di puntatori e allocazioni dinamiche della memoria (linguaggio semidinamico, perché è in grado di generare liste di variabili di dimensioni sconosciute nel momento della compilazione sebbene debbano essere di un tipo solo alla volta), oltre a tantissimi tipi di variabili diverse (variabili di tipo intero, reale, carattere o booleano). Un'altra novità che fu introdotta con questo linguaggio è la possibilità di creare procedure e funzioni capaci di gestire al loro interno le variabili e i dati locali.

Pascal consente di creare dai più semplici programmi che visualizzano dei messaggi di testo come il classico messaggio "Hello world", a più complessi programmi di matematica con finestra grafica, musica e pulsanti interattivi.

In ambito didattico il linguaggio Pascal è stato introdotto a partire dall'entrata in vigore del PNI1, nel 1985, in modo molto graduale, fino all'effettivo utilizzo da parte di tutti i corsi liceali PNI con il secondo PNI, nel 1991. Dalla maturità scientifica 1992-93 iniziano anche a comparire problemi d'esame che richiedono di implementare procedure con un linguaggio di programmazione noto e questo, nella maggior parte delle scuole, viene proprio fatto con il linguaggio Pascal (solitamente con il software Turbo Pascal), fino a quando, nel 2000 non compaiono più questi tipi di richieste nei compiti di maturità. I linguaggi di programmazione tornano quindi ad essere solo materia di studio senza un effettivo test nelle prove di maturità. Infine nel

2008 con la riforma Gelmini (entrata in vigore dall'anno scolastico 2010-11) gli indirizzi PNI vengono accorpati agli indirizzi tradizionali. Nei libri di testo, fino a pochi anni fa, venivano proposti esercizi da risolvere con Pascal ed erano guidati passo passo per aiutare lo studente a prendere confidenza con il software.

Esempio1

Un esempio molto semplice per iniziare ad esplorare i comandi di Pascal può essere dato dal seguente esercizio:

Crea un programma che prenda in input la misura del lato di un quadrato in cm e che restituisca in output la misura del perimetro e dell'area.

Soluzione

```
PROGRAM quadrato;
VAR
lato:real;
perimetro:real;
area:real;
BEGIN
write('Inserire il lato del quadrato: ');
readln(lato);
perimetro:=lato*4;
area:=lato*lato;
writeln('Il perimetro del quadrato e': ,perimetro:8:2);
writeln('L'area del quadrato calcolata e': ,area:8:2);
```

END.

Esempio 2

Un altro tipo di esercizio che può essere proposto nelle scuole secondarie di secondo grado è di questo tipo:

Scrivere un programma per calcolare le soluzioni reali di un'equazione di secondo grado nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Soluzione

```
PROGRAM EquazioneDiseccondogrado;
VAR a, b, c, Delta, x1, x2: real ;
BEGIN
WRITELN('Risoluzione equazione di secondo grado');
```

```

WRITELN(' ax2+bx+c=0');
WRITELN ('Inserire i coefficienti dell'equazione a,b,c ognuno seguito da un
invio');
READLN (a, b, c);
IF a<>0 THEN
BEGIN
Delta:= sqrt(b)-4*a*c;
IF Delta<0 THEN
WRITELN ( 'L'equazione non ammette soluzioni reali')
ELSE
BEGIN
x1:=(-b-sqrt(Delta))/(2*a);
x2:=(-b+sqrt(Delta))/(2*a);
WRITELN('Le due soluzioni reali sono');
WRITELN ('x1 = ', x1);
WRITELN ('x2 = ', x2);
END;
END
ELSE
WRITELN ('È un'equazione di I° grado');
END.

```

Il programma per prima cosa chiede in input i valori dei coefficienti e del termine noto, una volta acquisiti, verifica che sia un'equazione di secondo grado controllando che il coefficiente di x^2 sia maggiore o minore di 0. Controllato di avere avuto in input un'equazione di secondo grado, calcola il delta. Se quest'ultimo è minore di zero restituisce l'avvertenza che l'equazione non ammette soluzioni reali, se invece è maggiore o uguale a zero allora ricerca e stampa le due soluzioni. Questo tipo di programma strutturato con i comandi IF-THEN è molto utile per far imparare agli alunni come si può strutturare un qualsiasi problema con certe condizioni opportunamente studiate.

3.5 Derive

Derive è un software di tipo Computer Algebra System (CAS), quindi un programma di matematica, sviluppato dalla compagnia Soft Warehouse come aggiornamento di muMath⁷ nel 'dialetto' muLISP. Nel 1988 venne rilasciata

⁷muMath era un CAS sviluppato tra gli anni '70 e '80 da Albert Rich e David Stoutemyer alla Soft Warehoure di Honolulu nelle Hawaii. Era implementato con il linguaggio di programmazione muSIMP ed era supportato solo da alcune piattaforme. L'ultima versione è stata rilasciata nel 1983 dalla Microsoft.

la prima versione che girava su macchine con sistema operativo MS-DOS con memoria di almeno 512 Kb ed era molto semplice da utilizzare. Nel 1996 venne commercializzata la versione per Windows che era in grado di eseguire molteplici operazioni compresi calcoli simbolici e trigonometrici oltre ai calcoli algebrici ed analitici, inoltre era anche dotato di interfaccia grafica. Nel 1999 la compagnia fu acquisita dalla Texas Instruments che continuò a sviluppare Derive e a migliorarne le capacità. In versioni successive è stata inserita la possibilità di risolvere problemi con vettori e matrici, di semplificare, sviluppare o fattorizzare espressioni e anche la possibilità di creare grafici con i dati immessi che possono essere salvati in formati a scelta dell'utente. Negli ultimi aggiornamenti sono state aggiunte alcune funzioni create dagli utenti, in particolare funzioni per il calcolo tensoriale e per la soluzione di equazioni differenziali o altre funzioni particolarmente utili. Sono state poi aggiunte anche la possibilità di visualizzare dei passaggi intermedi e non solo la soluzione finale di un processo e l'eventualità di personalizzare l'interfaccia grafica e quella di creare grafici in 3D. A partire dal 2006 Derive non è stato più aggiornato per far posto a TI-Nspire che contiene al suo interno cinque ambienti interattivi collegati tra loro: il calcolatore con le stesse funzionalità di Derive, grafici e geometria, foglio elettronico, editor di testo e dati, statistiche per tracciare ed analizzare i dati statistici.

In ambito didattico ha avuto davvero molto successo per la sua semplicità di utilizzo, per la maneggevolezza e per la leggerezza del software (10 mb). Quest'ultimo aspetto ha fatto sì che potesse essere utilizzato anche in computer datati utilizzando indifferentemente piattaforme Windows o DOS. Viene utilizzato molto spesso come supporto alla didattica perché si presta molto bene al miglioramento della comprensione di concetti e procedimenti che vengono affrontati durante il corso degli anni scolastici di scuole secondarie di primo e secondo grado. Può essere sfruttato sia in campo algebrico, sia geometrico sia analitico, infatti, oltre ad eseguire i comuni calcoli di una calcolatrice scientifica, consente di lavorare con equazioni, espressioni, variabili, funzioni di vario tipo, vettori, matrici e calcoli simbolici. Sono possibili molteplici applicazioni come ad esempio il calcolo di limiti, derivate e integrali in campo analitico, semplificazioni di espressioni numeriche, letterali, trigonometriche, complesse e la risoluzione di equazioni. All'interno del programma si può operare in tre ambienti differenti denominati rispettivamente: algebra, grafici 2D e grafici 3D. Il primo è per l'esecuzione di calcoli, il secondo per la rappresentazione grafica in due dimensioni e il terzo per la rappresentazione grafica in tre dimensioni, utilizzabili anche contemporaneamente. La potenza di questo software risiede nell'algebra simbolica e nella grafica. Proprio per questi aspetti è stato molto spesso considerato uno strumento di ottima fattura e qualità per lavori matematici in ambito didattico. Derive

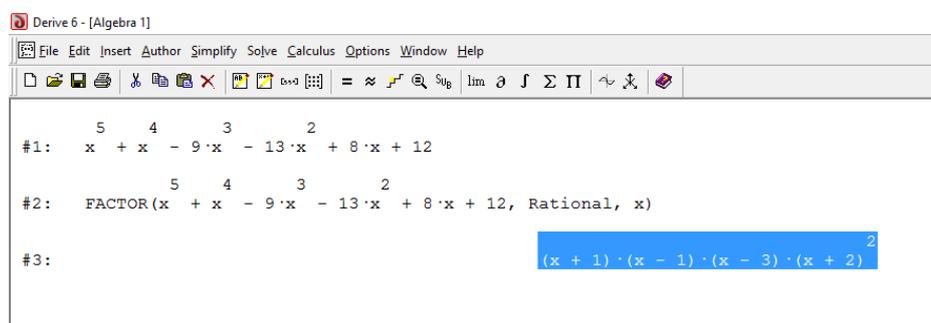
ha rappresentato un utilissimo alleato per lo sviluppo cognitivo di costrutti matematici anche avanzati. Inoltre questo tipo di sistema di calcolo permette un approccio alla matematica da differenti punti di vista, sia algebrico, sia grafico sia numerico e mette in evidenza le relazioni presenti tra di essi. Ad esempio per risolvere un'equazione si può fattorizzare il polinomio, quindi trovare la soluzione algebrica, oppure graficamente trovando i punti di intersezione della curva con l'asse x oppure ancora, numericamente, sfruttando il metodo di bisezione o altri metodi simili. Tuttavia, già da qualche anno, l'utilizzo di questo software per l'apprendimento, sta lasciando il posto a programmi più nuovi e performanti anche se in alcuni libri di testo, anche attualmente, vengono proposti esercizi da svolgere in ambiente Derive.

Esempio 1

Con Derive si possono ad esempio fattorizzare numeri ma anche polinomi. *Fattorizzare il polinomio*

$$x^5 + x^4 - 9x^3 - 13x^2 + 8x + 12$$

sul quaderno e verificare con il software Derive la correttezza del risultato.



Esempio 2

Può anche essere utilizzato per risolvere disequazioni con valore assoluto e per la visualizzazione grafica della soluzione.

Inserire la disequazione

$$|3x - 1| < 2$$

e rappresentarla in un unico grafico insieme alla soluzione (nel grafico dovrà quindi essere presente la funzione al primo membro, quella al secondo membro e la regione di piano delimitata dalla soluzione).

In questo modo gli alunni possono osservare direttamente dal grafico la soluzione della disequazione intersecando la regione colorata con la funzione.

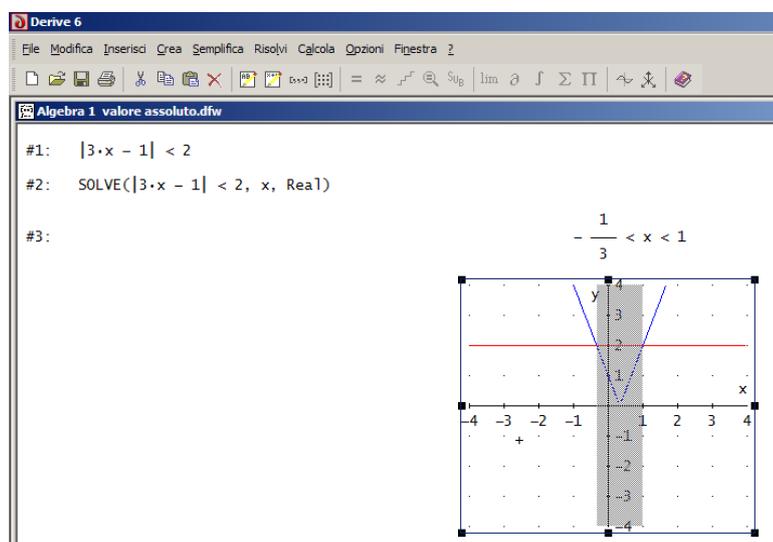


Figura 3.8: Soluzione disequazione con valore assoluto e rappresentazione grafica

Esempio 3

Un esempio utile dal punto di vista didattico è il calcolo della derivata come limite del rapporto incrementale.

Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}$$

utilizzando la definizione di derivata di una funzione.

Per prima cosa si definisce la funzione da derivare, poi si introduce il rapporto incrementale e lo si applica alla funzione data. Infine si calcola il limite del rapporto incrementale per h che tende a 0. Il risultato sarà esattamente la derivata della funzione iniziale.

The screenshot shows the Derive 6 software interface. The window title is "Derive 6". The menu bar includes "File", "Modifica", "Inserisci", "Crea", "Semplifica", "Risolvi", "Calcola", "Opzioni", and "Finestra 2". The toolbar contains various mathematical symbols and icons. The main workspace is titled "Algebra 1 limite.dfw" and contains the following steps:

#1: $f(x) := \sqrt{x}$

#2:
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

#3:
$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

#4:
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

#5:
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Figura 3.9: Derivata di una funzione calcolata come limite del rapporto incrementale

3.6 HTML

Verso la fine degli anni '80 e l'inizio degli anni '90, con la diffusione di sistemi operativi che ammettevano l'utilizzo del mouse e avevano a disposizione interfacce grafiche, si è sentita la necessità di avere a disposizione modalità più fluide per la navigazione online, essendo stata aperta, ormai da qualche anno, l'accessibilità al web da parte di tutti. Da questo è nato il progetto World Wide Web (WWW o Web) del fisico Tim Barners Lee che prevedeva fin dall'inizio finestre grafiche, multimediali e ipertestuali per accedere alle risorse condivise su Internet. A partire dal 1989 Barners Lee sviluppò questo progetto al CERN di Ginevra per far sì che fosse disponibile una illimitata libertà di navigazione tra le risorse di rete attraverso collegamenti incrociati e trasversali. Perciò furono definiti nuovi standard: l'Uniform Resource Locator (URL) il cui indirizzo designa in modo univoco i server e i documenti online, l'HyperText Transfer Protocol (HTTP) protocollo di comunicazione che dà la possibilità di fare collegamenti ipertestuali tra i documenti e l'HyperText Markup Language (HTML), linguaggio utile a creare documenti ipertestuali. Grazie all'intreccio di questi tre nuovi protocolli si è formato il Web 1.0 e successivamente quello che conosciamo noi oggi, con collegamenti tra i vari documenti da pagina a pagina, con grafica attiva e collegamenti che portano da un sito ad uno diverso con un solo click. Il World Wide Web Consortium (W3C) gestisce le definizioni degli standard compreso HTML e deve quindi approvare ogni nuovo standard.

L'HTML, è quindi un linguaggio per la codifica degli ipertesti attraverso marcatori che a partire dal 1989 ha avuto varie tappe di sviluppo. La prima versione ebbe ben poca diffusione dato che il web era sì accessibile a tutti ma pochi ne avevano la possibilità ma è servito come base alle versioni successive e come tester per gli sviluppi futuri. A distanza di pochi anni, infatti, fu implementata una nuova versione, HTML+, che non divenne però uno standard ma che fu messa a completamento della versione HTML 2.0 nel 1994. Questa era più fluida ma a suo discapito permetteva l'utilizzo di ben poche procedure, proprio per questo fu duramente criticata dagli implementatori di siti web. Con tale limitazione di comandi e la lentezza del W3C nell'approvare nuovi standard si diffuse il supporto di tag non standard e non approvati ufficialmente, messi a punto da parte delle società che commercializzavano programmi per la navigazione online come Netscape e Microsoft. Conseguenza di questo però era la non visualizzazione di questi tag da parte di programmi che si attenevano solamente agli standard creando notevole confusione per gli utenti finali che si ritrovavano a visualizzare solo determinate cose in una pagina se la aprivano con un browser piuttosto che con un altro. Nel 1995 fu approvato il nuovo standard HTML 3.0 che, tuttavia, tentava di introdurre fin troppe migliorie, tanto che risultava quasi inutilizzabile. Infatti non riscosse successo fino a quando fu ulteriormente aggiornato al modello 3.2 nel 1996 che inglobava al suo interno anche i tag più utilizzati che erano stati inseriti dalle altre compagnie, in tal modo si andava uniformando l'utilizzo globale delle pagine web e delle relative procedure di collegamento. Nel 1997 venne pubblicata la versione HTML 4.0, poi aggiornata due anni dopo nella versione HTML 4.01, in cui erano stati implementati tutti gli sviluppi degli anni precedenti, compresa la gestione di caratteri Unicode e di un nuovo marcatore per oggetti interattivi, oltre all'introduzione di fogli di stile a cascata, i Cascading Style Sheet (CSS) utilizzati per separare la parte testuale delle pagine HTML dalla relativa formattazione e far sì che si possa creare un codice ed un aspetto migliore, più chiaro e semplice sia da parte dei creatori sia da parte dei fruitori. L'ultimo standard riconosciuto dal W3C fu rilasciato nel 2000 ed era denominato ISO HTML, dopo di esso per quattordici anni non ci furono nuovi standard poiché la divisione del W3C predisposta allo sviluppo di HTML, si impegnò nella progettazione di XHTML, un linguaggio separato dall'HTML. Nel 2014 venne rilasciato l'ultimo standard riconosciuto dal W3C, l'HTML5.

Ora come ora i documenti HTML sono per noi all'ordine del giorno. Molto spesso anche senza rendercene conto, quando navighiamo online, passiamo da un documento all'altro come se fosse la cosa più naturale possibile. Infatti, questo tipo di documenti è in grado di gestire differenti tipi di tecnologie quali animazioni, interazioni con l'utente, contenuti multimediali come vi-

deo e audio. Tuttavia uno dei problemi principali per gli sviluppatori di documenti HTML era la compatibilità con diversi tipi di sistemi informatici, infatti l'obiettivo finale di questo tipo di standard era proprio quello di essere universale e quindi sfruttabile in ogni piattaforma. L'universalità è stata raggiunta anche se a volte la grafica può sembrare diversa rispetto al tipo di device e software utilizzati.

Già a partire dalla fine degli anni '90 in alcune scuole italiane sono stati proposti corsi in cui veniva inserito il linguaggio HTML. Questo era utile agli alunni perché li abituava a sintetizzare gli argomenti in modo da riuscire a costruire un ipertesto pagina per pagina con collegamenti che rimandavano a pagine successive ma anche ad altri argomenti correlati. Utilizzando il blocco note venivano preparate le pagine che poi dovevano essere collegate con i vari link e interamente strutturate.

Questo tipo di linguaggio permette di creare una quantità immensa di materiali di diverso tipo, infatti può essere sfruttato non solo per una materia specifica, anzi, molto spesso vengono utilizzati per creare ipertesti che coinvolgono tutte le discipline, progettando così lavori multidisciplinari. Qui gli alunni dovevano cogliere i collegamenti tra le differenti discipline, uscendo perciò dai classici schemi di materie viste a compartimenti stagni. Una volta creata la struttura della pagina HTML è anche possibile inserire al suo interno dei programmi scritti in altri tipi di linguaggi di programmazione, inserendovi finestre interattive o il risultato di codici per la rappresentazione di programmi di altro tipo.

In questo modo possono anche essere visti quelli che sono i retroscena del mondo cibernetico che ci circonda, fatto di pagine web che tramite link ci portano talvolta alla deriva. La programmazione di una pagina web partendo da poche e semplici regole dimostra agli alunni come sia importante saper creare qualcosa con le proprie mani e le proprie capacità e non solo saper utilizzare un prodotto creato da altri molto spesso con finalità diverse da quelle a noi utili.

3.7 Cabri

Cabri Géomètre è un programma di tipo grafico presentato per la prima volta nel 1988 dal matematico, informatico e ricercatore francese Jean-Marie Laborde. Questo software è in grado di generare figure geometriche attraverso costruzioni informatiche che traducono i passaggi che vengono effettuati con riga, squadre e compasso. Il punto di forza è la completa manipolazione da parte dell'utente della figura geometrica, infatti possono essere apportati cambiamenti che si riflettono istantaneamente sulla figura facendo così

apparire anche alcune proprietà della figura stessa. Inizialmente era stato implementato solo per piattaforme Macintosh, poi con sviluppi e aggiornamenti successivi venne progettata una versione utilizzabile anche in MS-DOS consentendo così una maggiore diffusione. Il suo utilizzo tanto dilagò che nel 1989 il gruppo di sviluppatori di questo progetto ricevette il permesso dal Ministero Nazionale Francese a commercializzare Cabri Géomètre per MCOs e DOS dapprima in tutto il territorio francese e poi in molti altri paesi. Questo portò il team ad ampliare i propri orizzonti creando una squadra di ricerca all'Istitut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées (IMAG) di Grenoble con la collaborazione della Texas Instruments che portò allo sviluppo di Cabri II. Mentre Cabri Géomètre permetteva la costruzione di figure geometriche solo in ambito euclideo, con costruzioni meccaniche senza alcun tipo di utilizzo di numeri, con il nuovo aggiornamento, Cabri II, viene data all'utente la facoltà di decidere se progettare una creazione che preveda anche l'utilizzo dell'algebra. Con Cabri II si possono quindi risolvere anche problemi non risolvibili con la sola geometria euclidea. Con la diffusione di internet nasce anche la richiesta da parte degli utenti di poter condividere i propri lavori realizzati con Cabri II, così viene sviluppata l'applicazione CabriJava che rende possibile la condivisione. A partire dal 2001 Laborde fonda la società Cabrilog per lo sviluppo e la distribuzione di ulteriori programmi di calcolo quali: Cabri II Plus, aggiornamento di Cabri II, Cabri Junior un software per le calcolatrici grafiche che consente la condivisione dei progetti dalla calcolatrice grafica al computer e viceversa e Cabri 3D per la geometria dinamica in tre dimensioni.

Lo sviluppo di queste tre componenti porta a svariati utilizzi nella pratica didattica. Si possono esplorare situazioni geometriche di diverso tipo, dalle proprietà geometriche delle figure a situazioni particolari con riflessioni sulle animazioni per mostrare caratteristiche di particolari figure. Tutto ciò costituisce un supporto molto efficace all'apprendimento e all'insegnamento della geometria e della matematica in tutti i diversi gradi scolastici in quanto il gruppo di sviluppo del software, attraverso convegni e incontri di aggiornamento, ha coltivato una continua collaborazione con ricercatori e con tutta la comunità didattica. Con le sinergie create con la Texas Instrument è stato loro possibile sviluppare delle versioni particolari per le calcolatrici grafiche TI-83 e TI-83SE con le quali è possibile sviluppare figure che si basano sulla geometria dinamica e anche mettere alla prova alcuni teoremi.

La diffusione sul territorio italiano di materiali didattici viene gestita da un team che fa capo all'IRRE Emilia Romagna che ha costruito un sito dedicato a Cabri con molteplici risorse e che organizza convegni per lo scambio di idee e innovazioni tra rappresentanti della società ed insegnanti.

Grazie alle solide basi matematiche di Cabri e ai conseguenti affidabili

risultati matematici, il software ha avuto un grandissimo successo, questo anche perché l'attenzione principale è spostata sull'utente (user-centered) non sulla macchina, quindi è messa al primo posto la manipolazione diretta della costruzione, l'utente è attivo nella progettazione e non sta a guardare quello che la macchina sa fare. Questo tipo di software permette a un qualsiasi tipo di utente di imparare qualcosa, che sia esso bambino, docente o ricercatore. Con la costruzione di un progetto possono scaturire tantissime nuove idee che portano così a nuove scoperte. Inoltre la facilità di utilizzo rende maneggevole il software anche a chi non l'ha mai usato, senza il bisogno di studiare complicati manuali, l'uso si basa sul principio: "ciò che vedi è ciò che ottieni" (What You See Is What You Get - WYSIWYG) e, anzi ancor meglio, "ciò che vedi è ciò che ti aspetti". La diffusione di Cabri è stata molto ampia, tanto che anche nei libri di testo ancora oggi vengono proposti esercizi da risolvere con Cabri.

Esempio 1

Cabri II può essere utilizzato per esempio per la costruzione di trasformazioni isometriche: simmetria assiale, rotazione o traslazione.

Disegnare un quadrilatero ABCD e determinare la figura A'B'C'D' corrispondente ottenuta dalla traslazione della prima figura di un vettore \vec{v} di modulo 5 cm.

Una volta disegnato un quadrilatero si disegna il vettore \vec{v} , lo si misura ed eventualmente si allunga o si accorcia per far corrispondere il modulo. Ciò fatto, si utilizza il sesto tasto (translation) che permette di traslare tutti i punti. In ultimo si ricostruisce il poligono tracciando i segmenti fra i punti determinati con la traslazione.

Completato l'esercizio si possono far fare delle considerazioni agli alunni facendogli spostare \vec{v} in modo da osservare come cambia la figura traslata in relazione alla modifica del vettore di traslazione.

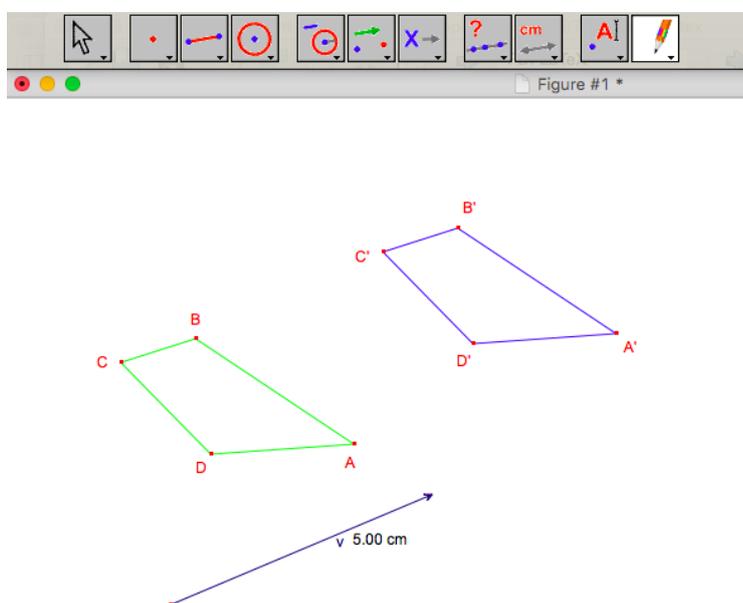


Figura 3.10: Traslazione ABCD di vettore \vec{v}

Esempio 2

Con il software Cabri 3D si può far pratica con la geometria nello spazio: punti, rette, piani, poliedri, superfici, solidi di rotazione, volumi, coordinate nello spazio, vettori nello spazio e trasformazioni geometriche. Un esercizio tipo svolgibile con l'ausilio di Cabri 3D, è la costruzione di alcuni poliedri e la visione della relativa apertura tramite la funzione "apri poliedro" che permette di vedere lo sviluppo su un piano di un qualsiasi poliedro. Questo aiuta gli alunni a comprendere meglio il calcolo della superficie totale.

Disegnare nel foglio di lavoro di Cabri 3D un ottaedro regolare e con lo strumento "apri poliedro" visualizza il suo sviluppo. Si calcoli la misura della superficie totale.

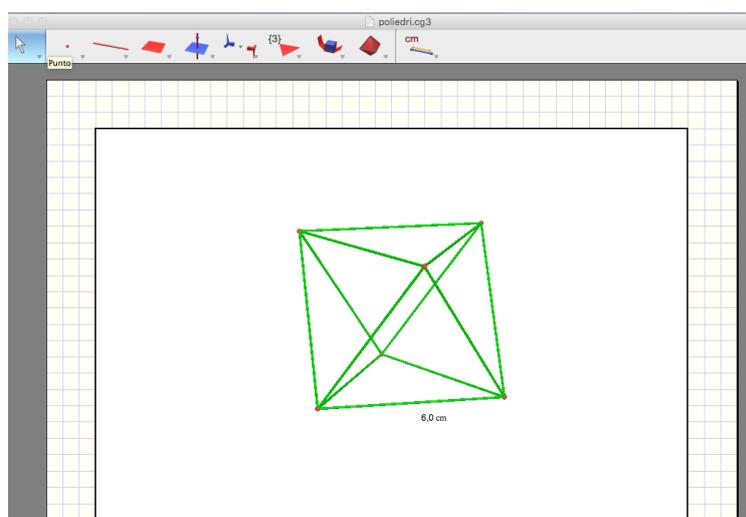


Figura 3.11: Ottaedro regolare

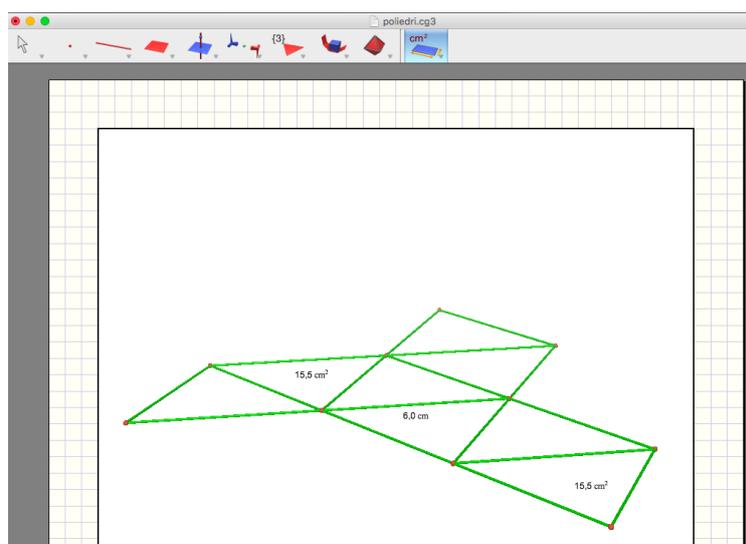


Figura 3.12: Sviluppo ottaedro regolare

Per il calcolo della superficie totale si può osservare dallo sviluppo il numero delle facce e la forma del poliedro e si può anche ottenere una verifica dei calcoli algebrici che lo studente ha precedentemente appreso. Si possono misurare le aree di tutte le facce in modo da osservare che sono tutte uguali e infine sommarle.

Un altro argomento, tra gli altri, che può essere svolto con l'ausilio di Cabri 3D è lo studio delle coniche a partire dalla loro definizione. Possono essere costruite da ogni alunno come sezioni di un cono a due falde con un piano. Queste sono solo una minima parte di tutte le applicazioni che si possono attuare con Cabri e i relativi programmi associati.

3.8 MatLab

Matrix Laboratory (MatLab) è un software di calcolo scientifico ideato per la gestione di oggetti di tipo matrice, creato da Cleve Barry Moler matematico ed informatico con specializzazione in analisi numerica all'Università del Nuovo Messico verso la fine degli anni '70. Moler creò questo programma con l'intenzione di dare accesso ai propri studenti a LINPACK e ad EISPACK⁸ senza che dovessero per forza imparare il linguaggio Fortran. Nel 1983 durante un seminario all'Università di Stanford, Moler incontrò l'ingegnere Jack Little con cui iniziò da subito a collaborare e, insieme a Steve Bangert, rieditarono il codice del programma in linguaggio C e nel 1984 diedero vita alla MathWorks. Da quel momento in poi continuarono gli sviluppi e gli aggiornamenti del programma. Inizialmente venne utilizzato da ricercatori e da ingegneri, ma ben presto il suo utilizzo si diffuse anche in altri ambienti come quello accademico e in comunità matematiche di vario tipo. Nel 1996 svilupparono la versione MatLab 5.1 compatibile con tutte le piattaforme, ciò fu motivo di ulteriore crescita commerciale del programma. Nel 2000, MatLab fu interamente riscritto per sfruttare un nuovo pacchetto di librerie per la manipolazione di matrici, il pacchetto LAPACK anch'esso scritto in Fortran.

In questo ambiente si ha la possibilità di sfruttare matrici di vario tipo, utilizzare funzioni già presenti nel programma, definirne di nuove, sviluppare algoritmi, finestre grafiche e collegamenti con software esterni. In più rappresenta un linguaggio di programmazione con cui possono essere creati una quantità infinita di programmi utili a differenti scopi. Questo linguaggio è di tipo interpretato e non compilato, cioè le istruzioni vengono tradotte in

⁸LINPACK ed EISPACK sono librerie matematiche, cioè insiemi di subroutine e che sviluppano algoritmi per calcolare numeri random, soluzioni di sistemi lineari, funzioni notevoli, FFT e molto altro. Vengono utilizzate per far sì che quando il codice si deve ripetere per via di algoritmi ricorrenti, non ci sia bisogno di riscrivere tutto ogni volta. LINPACK è un subroutine, un metodo, implementato in linguaggio di programmazione Fortran, per la soluzione di equazioni lineari e problemi ai minimi quadrati. EISPACK è anch'esso un subroutine in Fortran ma utile per il calcolo di autovalori e autovettori speliizzata anche per matrici di diversi tipi: reali, complesse, hermitiane, simmetriche, ecc.

linguaggio macchina e subito eseguite una per volta, diversamente da quanto avviene per altri linguaggi in cui, per prima cosa, tutto il programma viene tradotto in linguaggio macchina e poi viene eseguito.

Il software si compone di cinque parti principali:

- il linguaggio proprietario con gestione delle principali strutture di programmazione;
- ambiente e gestione del lavoro;
- ambiente e gestione della parte grafica;
- libreria di funzioni matematiche;
- libreria per l'interazione con programmi scritti in C o Fortran.

Comprende anche una vastissima varietà di funzioni predefinite e diverse librerie, i "toolbox" per differenti tipi di applicazioni che l'utente è libero di incrementare. Si possono anche trasformare programmi scritti in linguaggio MatLab in programmi scritti in linguaggio C e C++ senza il bisogno di una totale riscrittura. Inoltre le variabili non sono da definire, come invece deve essere fatto in moltissimi altri programmi con linguaggi diversi, ma possono essere utilizzate variabili di diverso tipo senza il bisogno di dichiararle tutte all'inizio, in aggiunta è anche case-sensitive e i grafici possono essere prodotti sia in due sia in tre sia in quattro dimensioni con il completo controllo della formattazione di ogni elemento. Ci si trova davanti ad un ambiente di calcolo completo di visualizzazione grafica e programmazione scientifica. Si può perciò sfruttare in molteplici situazioni; dalla semplice risoluzione di un'espressione numerica, alla fruizione di algoritmi di base già implementati all'interno del programma stesso, allo sfruttamento dell'ambiente di programmazione per lo sviluppo di funzioni e algoritmi personali con la creazione di procedure e di applicazioni, all'analisi dei dati, l'esplorazione, il disegno industriale e scientifico, la costruzione di interfacce utenti e la costruzione di Toolbox personalizzati. Oltre a ciò possono anche essere costruiti dei prototipi utilizzabili per la modellistica e la simulazione progetti. Il sito del programma, Mathworks, è una fonte preziosa di risorse, esempi ed applicazioni pronte per essere utilizzate, come anche la documentazione reperibile in rete.

All'apertura del programma l'ambiente si divide in tre finestre:

- **command window** parte in cui vengono digitati i comandi;
- **workspace** spazio in cui sono elencate tutte le variabili utilizzate fino a quel momento con le relative informazioni (tipo e dimensione);

- **current folder** indica i file contenuti all'interno della cartella di lavoro e permette di spostarsi da una cartella all'altra.

Diversamente da quanto accade con le precedenti tre finestre che compaiono tutte insieme a comporre la finestra principale, l'editor (**MatLab editor**) si apre generalmente in una finestra a parte e qui vengono creati i programmi da parte dell'utente che poi possono essere richiamati sia direttamente nella command window oppure all'interno di altri programmi. Si possono anche creare delle funzioni (M-function) che verranno richiamate in altre funzioni o in altri programmi.

Attualmente MatLab è uno dei programmi scientifici più utilizzati nel campo della ricerca, dell'ingegneria, per il calcolo scientifico e su larga scala per la didattica, in particolare per l'insegnamento di algebra lineare e analisi numerica oltre che per l'impiego specifico nell'elaborazione di immagini.

Esempio 1

Un possibile primo approccio al programma da parte di alunni frequentanti le scuole secondarie di secondo grado potrebbe essere la rappresentazione di vettori e le operazioni tra di essi, con conseguente visualizzazione grafica. Si crea uno script in cui vengono definiti i vettori, le operazioni studiate e le si rappresentano nel piano cartesiano o nello spazio.

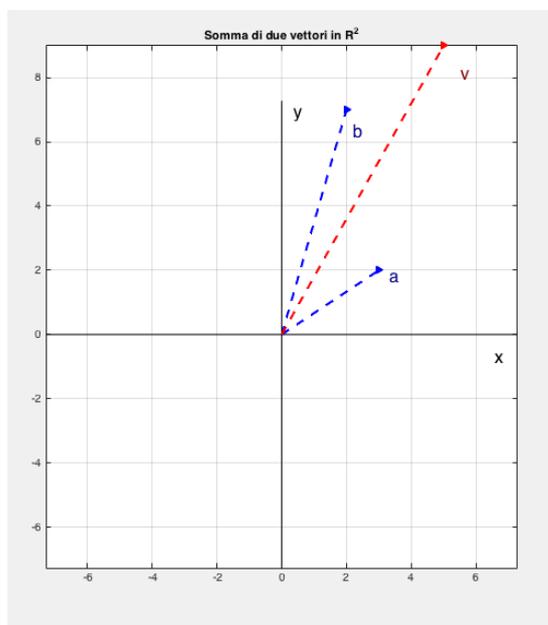


Figura 3.13: Somma tra due vettori in \mathbb{R}^2

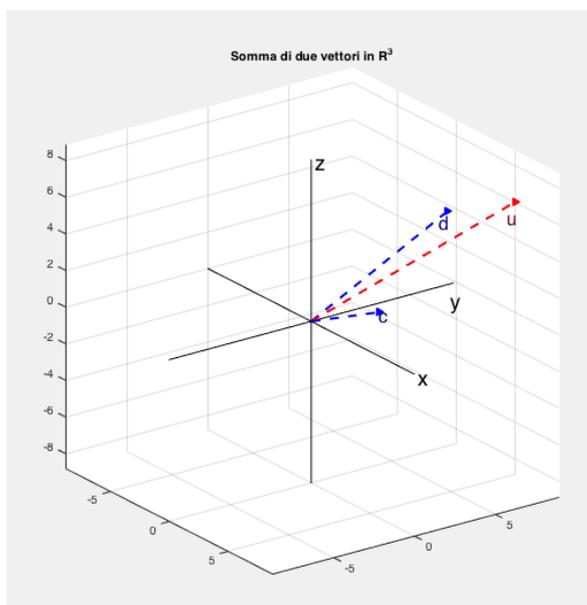
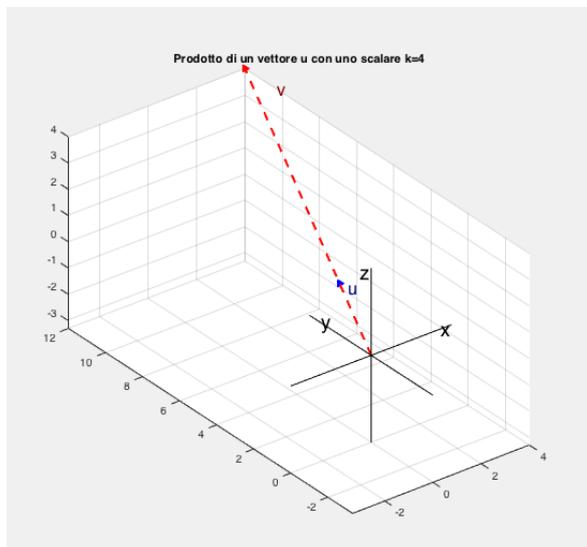
Figura 3.14: Somma tra due vettori in \mathbb{R}^3 

Figura 3.15: Prodotto di un vettore con uno scalare positivo

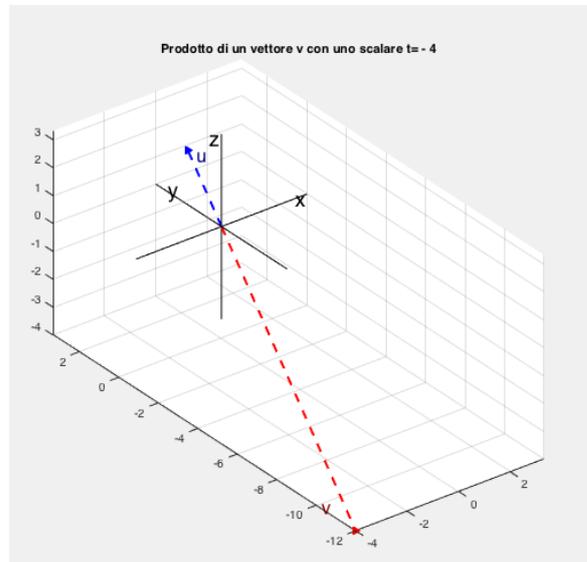


Figura 3.16: Prodotto di un vettore con uno scalare negativo

Esempio 2

Tra le tante applicazioni possibili di questo strumento molto utile e potente c'è l'implementazione di vari metodi numerici come ad esempio quelli per calcolare la soluzione di un'equazione non lineare: metodo di bisezione, metodo delle approssimazioni successive e metodo di Newton.

Scrivere una funzione MatLab che implementi uno dei metodi numerici per il calcolo della soluzione di un'equazione non lineare scegliendo tra bisezioni, approssimazioni successive o Newton e data l'equazione

$$f(x) = xe^{-x} - e^3$$

creare uno script MatLab che disegni il grafico della funzione e che sfrutti il metodo implementato per risolvere l'equazione nell'intervallo $[0,1]$ usando criteri di arresto assoluti con tolleranza 10^{-6} .

Soluzione

```
function [x,fx,k]=bisezione(a,b,f,tau1,tau2)
% a,b sono gli estremi dell'intervallo
% c e' il punto medio di [a,b]
fa=f(a);
fb=f(b);
fc=1;
%conto le interazioni che faccio con la variabile k
k=1;
```

```

while(abs(fc)>tau1 && (b-a)>tau2+eps*max(abs(b),abs(a))) && k<200
c=a+(b-a)/2;
fc=f(c);
%devo controllare che il prodotto sia minore di 0, perché se è maggiore di
zero devo considerare l'altro intervallo
if sign(fa)*sign(fc)>0
a=c;
fa=fc;
else
b=c;
fb=fc;
end
x(k,1)=c;
fx(k,1)=fc;
k=k+1;
end

```

Una volta implementato il metodo di bisezione si scrive un'altra funzione in cui viene definita solo la funzione data, infine si costruisce il main in cui viene richiamato il metodo implementato, si fa visualizzare nella command window il numero di iterazioni effettuate dal metodo e quale valore della soluzione approssimata è stato trovato, poi con la funzioni *plot* di MatLab si rappresenta la funzione graficamente. Possono anche essere visualizzate le liste dei punti medi di ogni intervallo costruito dal metodo per trovare la soluzione dell'equazione.

3.9 Mathematica e Wolfram Alpha

Mathematica è un programma utilizzato per il calcolo numerico e simbolico sviluppato per diverse piattaforme. Non solo, Mathematica è anche un linguaggio di programmazione interpretato molto diffuso e utilizzato in vari ambiti. Venne ideato dal fisico Stephen Wolfram nel 1986 come secondo progetto dopo l'abbandono del Symbolic Manipulation Program (SMP) sviluppato qualche anno prima. La prima versione, Mathematica 1.0 venne rilasciata nel 1988 insieme al relativo manuale di centinaia di pagine e girava solamente in sistemi operativi Mac e Unix, gli altri sistemi operativi non avevano ancora una potenza sufficiente a far andare il programma. Inizialmente l'idea era quella di distribuire il programma prima solo ai produttori di computers, ma c'era un'eccitazione generale per il lancio di questo nuovo software e soprattutto per quello che Mathematica avrebbe potuto fare in futuro. Steve Jobs fu il primo a voler siglare un accordo per l'inserimento

del programma in ogni computer NeXt che in quel periodo ancora non era stato rilasciato, seguirono poi gli accordi con la Stanford University Network, la Silicon Graphics, la IBM e tutta una serie di altre compagnie, avviando così la diffusione sia tramite la vendita di computer sia tramite le riviste di settore e la stampa.

Lo scopo principale era quello di poterlo utilizzare per "fare scienze", quindi non solo come uno strumento matematico per i matematici, ma anzi uno strumento che consentisse di "fare matematica" per arrivare ad altri scopi come lo studio della fisica. Fu quindi implementato nel corso degli anni con sempre crescenti funzionalità. Il suo linguaggio di programmazione, il Wolfram Language, è un linguaggio interpretato che si basa su diversi tipi di programmazione: funzionale, logica, riconoscimento di schemi, sostituzione e procedurale. Il linguaggio principalmente usato per la scrittura di Mathematica è C, ma ci sono delle parti anche in C++ e quasi tutte le librerie presenti sono invece scritte nel linguaggio proprietario. Durante il corso degli anni sono state rilasciate, fino al 2016, circa 25 versioni di Mathematica che comprendono diversi aggiornamenti ma anche cambiamenti sostanziali come i primi risolutori di equazioni differenziali ordinarie sia numeriche che simboliche, la possibilità di utilizzare il calcolo simbolico, la manipolazione di matrici di vario genere, la soluzione di sistemi di equazioni, il calcolo di integrali e con queste tantissime altre funzioni. È uno strumento che offre differenti possibilità e che consente di operare in moltissimi campi, con l'ulteriore possibilità di avere una grafica di ottimo livello per l'elaborazione di immagini.

Mathematica si compone di due parti principali, il nucleo o kernel che interpreta le espressioni in linguaggio Wolfram e restituisce le espressioni come soluzioni e il front end, che è l'interfaccia che fa da tramite tra l'utente e l'accesso vero e proprio ai dati. Il front end consente di creare e visualizzare a schermo documenti creati con blocco note contenenti codici di programmi, con una giusta visualizzazione delle formule, inoltre possono anche essere visualizzati grafici, tabelle, formule e relative didascalie, parti di testo, il tutto presentato con suoni. In più i testi e i documenti creati possono essere convertiti in formato TeX o XML per un ulteriore utilizzo in documenti esterni o in pagine web. Negli ultimi anni le possibilità messe a disposizione da computer sempre più potenti e performanti hanno portato all'introduzione di matrici sparse nel 2003 e all'utilizzo della libreria GNU Multiple-Precision Arithmetic (GMP), una libreria che permette la gestione di numeri interi, razionali e in virgola mobile con tutte la potenza possibile della macchina stessa.

Il fine ultimo di tutti gli sforzi compiuti per l'implementazione di questo programma era sempre stato quello di rendere accessibile a tutti il calcolo

computazionale, di rendere quindi possibile il calcolo dovunque sia necessario e possibile e di dare accesso a tutti al calcolo computazionale.

Tutte le strutture fondamentali sfruttabili in Mathematica sono composte di espressioni, cioè di un'intestazione e di una sequenza di argomenti separati da una virgola e racchiusi tra parentesi quadre. Così quando si vuole valutare una certa funzione la si scrive nel front end che la invia al kernel il quale per prima cosa legge l'intestazione e poi l'espressione con le regole definite dall'utente.

Nel 2009 venne costruito dalla Wolfram Research, Wolfram Alpha, scritto in linguaggio Wolfram, un motore computazionale di conoscenza (o anche chiamata macchina di risposte) che risponde direttamente alle domande dell'utente grazie al suo filo diretto con Mathematica. A differenza dei noti motori di ricerca che propongono dei link ad altri siti, questo motore di conoscenza restituisce la risposta ad una qualsiasi domanda ben posta. Per la prima volta era messa a disposizione di tutti, online, la conoscenza computazionale su larga scala. Viene utilizzata da milioni di persone ogni giorno e nel corso degli anni sono state anche sviluppate applicazioni per i device mobili. Wolfram Alpha non solo può calcolare espressioni algebriche, simboliche o compiere statistiche, ma è anche in grado di rispondere a domande di cultura generale mondiale che richiedano un calcolo computazionale per la risposta come ad esempio l'età di qualche personaggio famoso, ma non è invece in grado di proporre disquisizioni sulla scelta tra più possibilità. La piattaforma online è un vero e proprio scrigno di conoscenza e potenza computazionale a disposizione di tutto il web, infatti dal punto di vista matematico si possono non solo risolvere espressioni, integrali, derivate, sviluppi in serie e tantissime altre funzioni diverse, ma è possibile anche vedere i passaggi che vengono fatti per arrivare al risultato finale, cosa che non sempre, anzi quasi mai, un programma è grado di visualizzare.

Accedendo al portale www.wolframalpha.com viene visualizzata una linea di input in cui inserire una domanda oppure dei dati oppure un'espressione o ancora una funzione, più in basso sono presenti dei link che indicano all'utente la possibilità di inserire anche foto, pacchetti di dati oppure caricare file. Infine nella restante parte di pagina vengono visualizzati dei riquadri cliccabili che rimandano a pagine di esempi di domande che possono essere poste al motore di conoscenza, suddivisi per argomenti: matematica, soluzioni passo passo, statistica e analisi dati, parole e linguistica, personaggi e storia, date e tempi, cultura e media, soldi e finanza, fisica, dati socioeconomici, astronomia, musica, ingegneria, luoghi e geografia, cibo e nutrizione, materiali, scienze della terra, shopping, scienze umana, tempo e meteorologia, mondo tecnologico, scienze computazionale, trasporti e sistemi web e computer.

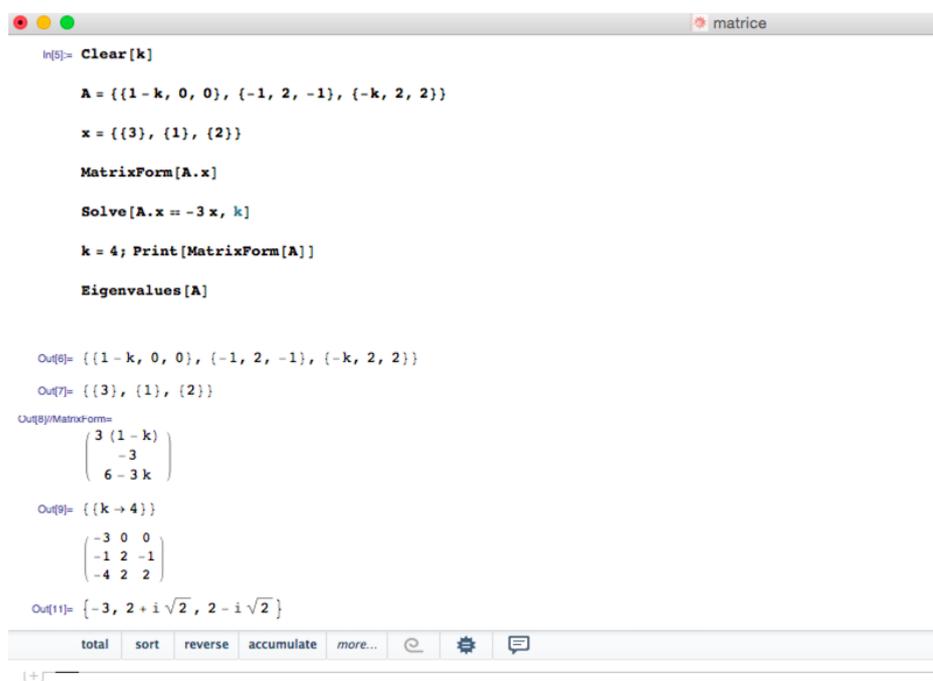
Mathematica viene spesso e volentieri utilizzato per la didattica sia per

le scuole secondarie di secondo grado sia universitaria, vengono svolti ogni anno molteplici corsi per presentano le funzionalità e insegnano l'uso di questo potentissimo programma, per far sì che possa essere sfruttato al meglio per tutti i suoi scopi, senza soffermarsi alla sola superficie.

Con Mathematica si sono svolgere una quantità infinita di esercizi tra cui anche quelli proposti di seguito:

Esempio 1

Individuare i k per cui $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia autovettore di $A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -k & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Si scelga un valore di k e si calcoli l'autovalore corrispondente.



```

In[5]:= Clear[k]

A = {{1 - k, 0, 0}, {-1, 2, -1}, {-k, 2, 2}}

x = {{3}, {1}, {2}}

MatrixForm[A.x]

Solve[A.x == -3 x, k]

k = 4; Print[MatrixForm[A]]

Eigenvalues[A]

Out[6]= {{1 - k, 0, 0}, {-1, 2, -1}, {-k, 2, 2}}

Out[7]= {{3}, {1}, {2}}

Out[8]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3(1-k) \\ -3 \\ 6-3k \end{pmatrix}$$


Out[9]= {{k -> 4}}


$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$


Out[11]=  $\{-3, 2 + i\sqrt{2}, 2 - i\sqrt{2}\}$ 

```

Figura 3.17: Soluzione esercizio 1 con Mathematica

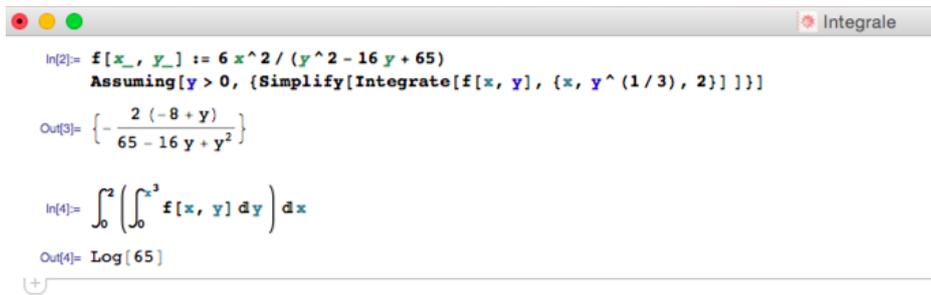
Esempio 2

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A \frac{6x^2}{y^2 - 16y + 65} dx dy$$

con

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3\}$$



```

In[2]:= f[x_, y_] := 6 x^2 / (y^2 - 16 y + 65)
Assuming[y > 0, {Simplify[Integrate[f[x, y], {x, y^(1/3), 2}]}]}

Out[3]:= {- 2 (-8 + y) / (65 - 16 y + y^2)}

In[4]:= Integrate[Integrate[f[x, y], dy], dx]

Out[4]:= Log[65]

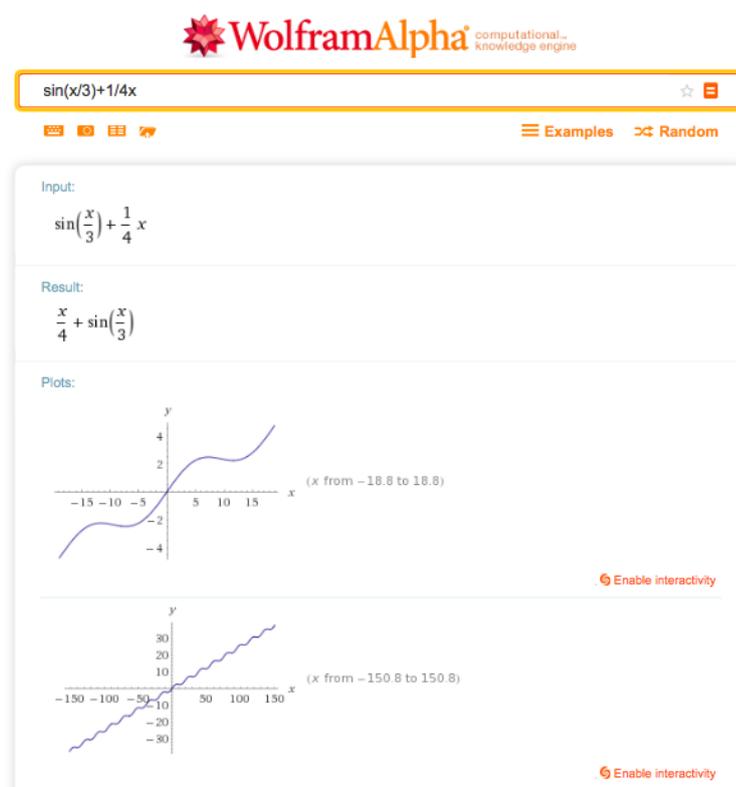
```

Figura 3.18: Soluzione esercizio 2 con Mathematica

Come già detto in precedenza il portale online Wolfram Alpha può essere sfruttato in molteplici modi differenti con domande di diversi tipi. Seguono due esempi di come può essere interpellato l'applicativo e le relative risposte.

Esempio 3

Inserendo una funzione nella barra di input, di risposta si ottengono dei riquadri che indicano il grafico della funzione, dei modi diversi per scrivere la stessa funzione, le radici, le proprietà come dominio, parità o disparità della funzione, sviluppo in serie, derivata, integrale infinito e tante altre informazioni che a loro volta possono espandersi per visualizzare i passaggi che sono stati compiuti per arrivare a quel risultato.



Root:
 $x = 0$

Integer root:
 $x = 0$

Properties as a real function:

Domain:
 \mathbf{R} (all real numbers)

Parity:
odd

\mathbf{R} is the set of real numbers

Series expansion at $x=0$:

$$\frac{7x}{12} - \frac{x^3}{162} + \frac{x^5}{29160} + O(x^6)$$
(Taylor series) [Big-O notation >](#)

Derivative: [Approximate form](#) [Step-by-step solution](#)

$$\frac{d}{dx} \left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} \right) = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{4}$$

Indefinite integral: [Step-by-step solution](#)

$$\int \left(\frac{x}{4} + \sin\left(\frac{x}{3}\right) \right) dx = \frac{x^2}{8} - 3 \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \text{constant}$$

Local maxima: [Approximate form](#)

$$\max \left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(6\pi n + \sqrt{7} + 3 \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \right) \text{ at } x = 6\pi n + 3 \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$$
for integer n
 $\cos^{-1}(x)$ is the inverse cosine function

Local minima: [Approximate form](#)

$$\min \left(\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(6\pi n - \sqrt{7} - 3 \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \right) \text{ at } x = 6\pi n - 3 \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$$
for integer n

Alternative representations: [More](#)

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{\csc\left(\frac{x}{3}\right)}$$

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4}$$

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4}$$
 $\csc(x)$ is the cosecant function
[More information >](#)

Series representations: [More](#)

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{-1-2k} x^{1+2k}}{(1+2k)!}$$

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{1+2k}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right)^{2k}}{(2k)!}$$
 $n!$ is the factorial function
 $J_n(x)$ is the Bessel function of the first kind
[More information >](#)

Integral representations:

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} + \frac{x}{3} \int_0^1 \cos\left(\frac{t x}{3}\right) dt$$

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{i x}{12 \sqrt{\pi}} \int_{-i \infty + \gamma}^{i \infty + \gamma} \frac{e^{s - \frac{x^2}{36 s}}}{s^{3/2}} ds \quad \text{for } \gamma > 0$$

$$\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{4} = \frac{x}{4} - \frac{i}{2 \sqrt{\pi}} \int_{-i \infty + \gamma}^{i \infty + \gamma} \frac{6^{-1+2s} x^{1-2s} \Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - s\right)} ds \quad \text{for } (0 < \gamma < 1 \text{ and } x > 0)$$

$\Gamma(x)$ is the gamma function
[More information »](#)

Definite integrals:

$$\int_0^{3\pi} \left(\frac{x}{4} + \sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) dx = 6 + \frac{9\pi^2}{8} \approx 17.1033$$

[More digits](#)

$$\int_0^{6\pi} \left(\frac{x}{4} + \sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) dx = \frac{9\pi^2}{2} \approx 44.4132$$

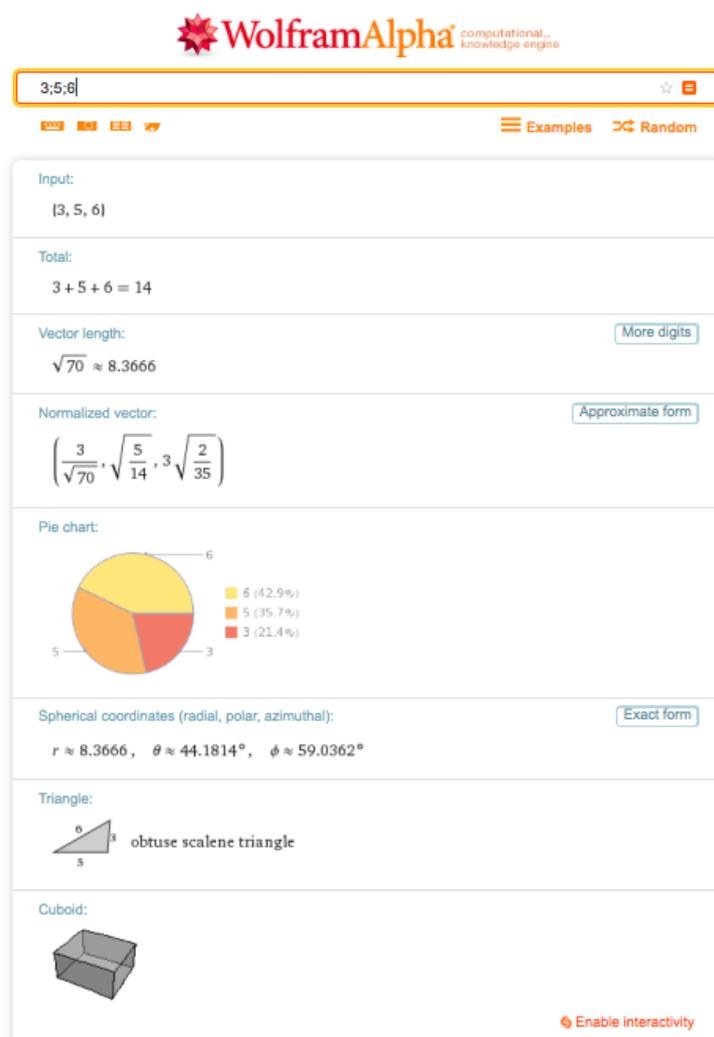
[More digits](#)

$$\int_{-3\pi}^{6\pi} \left(\frac{x}{4} + \sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) dx = \frac{27\pi^2}{8} - 6 \approx 27.3099$$

[More digits](#)

Esempio 4

Inserendo invece pacchetti di dati all'interno dell'applicativo, questo interpreta i dati in molteplici modi. Se viene inserita una terna di numeri Wolfram Alpha la interpreta prima come numeri da sommare, poi come coordinate di un vettore di cui calcola il modulo e il vettore normalizzato, come dati statistici con cui costruire un grafico a torta, come coordinate sferiche, come lati di un triangolo e infine come le dimensioni di un parallelepipedo a facce rettangolari.



3.10 Geogebra

Geogebra è un software di matematica dinamica utile ad ogni grado di educazione scolastica della matematica. Raggruppa al suo interno elementi di geometria, algebra, foglio di calcolo, statistica, analisi matematica e la possibilità di creare grafici. Il suo motto, come riportato nel portale ufficiale, è *matematica dinamica per insegnare e imparare*, infatti è una calcolatrice grafica che può essere utilizzata per fare analisi, geometria, algebra, statistica e matematica 3D, il tutto a completa disposizione di tutti sia sul web, sia come software da scaricare gratuitamente nel computer sia come applicazione per tablet e smartphone. Sul sito ufficiale vengono anche indicate

le tre ragioni per cui questo software è apprezzato da studenti, insegnanti e scuole, in particolare si legge: *"gli studenti lo amano perché rende la matematica "tangibile", Geogebra crea un collegamento tra geometria e algebra in un modo completamente nuovo e visuale: gli studenti possono finalmente vedere, toccare e interagire con la matematica; rende la matematica dinamica, interattiva e divertente, Geogebra insegna la matematica agli studenti in un modo nuovo e stimolante che va oltre la lezione tradizionale, sfruttando le potenzialità dei nuovi media; rende la matematica accessibile e alla portata di tutti, Geogebra consente agli studenti di stare in contatto con la matematica sempre e ovunque, a scuola, a casa e in mobilità; rende la matematica più facile da capire, Geogebra crea le interazioni necessarie agli studenti per "fare propri" i concetti matematici"*.

L'idea è scaturita da un giovane laureando dell'Università di Salisburgo nel 2001, Markus Hohenwarter che, scontento dei programmi di geometria e algebra disponibili nella sua facoltà, decide di crearne uno suo, Geogebra. Nasce come un software rivolto a studenti ed insegnanti, quindi con il chiaro intento di un utilizzo per la didattica. Il progetto prende vita man mano prima in due università della Florida, poi all'Università di Linz dove, insieme ad un gruppo di ricercatori e sviluppatori, porta avanti il progetto ampliandolo ogni giorno di più. È un software open-source che permette cioè il contributo di sviluppatori esterni ed è anche gratuito e alla portata di tutti. Questi due aspetti sono sicuramente punti di forza molto importanti per il progetto perché contribuiscono notevolmente alla sua diffusione. Grazie ai contributi di sviluppatori e traduttori provenienti da tutto il mondo, la diffusione in tutto il pianeta trova i suoi riscontri nei download, e nell'effettivo utilizzo in molte scuole di tutti i gradi scolastici, con la spinta data anche dai curricula nazionali in cui esplicitamente si richiede agli alunni di saper riprodurre figure geometriche sia con le strumentazioni classiche sul foglio, sia con programmi interattivi.

Inizialmente erano possibili solo costruzioni in due dimensioni, negli ultimi due anni invece, è stata sviluppata una nuova versione in cui è stata integrata la parte in 3D ed è possibile utilizzare sia la finestra 3D sia quella in due dimensioni per la costruzione di figure geometriche anche in contemporanea. Una volta costruito il progetto, può essere condiviso in Virtual Learning Environment (VLE) come ad esempio Moodle (il quale spesso e volentieri viene utilizzato nella pratica didattica per la condivisione di documenti nelle varie sezioni dedicate alle differenti classi, in cui professori e alunni trovano un ambiente di condivisione reciproco), ma anche in formati utili per l'inserimento in altri programmi o per la condivisione sul web.

Numerosi sono i riconoscimenti che ha ricevuto il Software, il primo dei quali è stato l'European Academic Software Award nel 2002, nel 2004 il premio

German Education Software Award, sono poi seguiti una dozzina di altri riconoscimenti in altrettante nazioni diverse.

Geogebra collega geometria, algebra e foglio di calcolo in un unico ambiente dinamico con una grafica semplice e intuitiva e tantissime funzionalità. È stato creato anche un portale apposito utile per reperire materiali e video tutorial per insegnanti e alunni alle prese con costruzioni geometriche.

Le applicazioni possibili possono essere molteplici, dalla semplice costruzione di figure geometriche di base, a quella di figure dinamiche attraverso l'utilizzo di slider, di caselle di controllo, la creazione di strumenti personalizzabili, l'inserimento di immagini esterne, l'uso di finestre di grafica 3D con l'ausilio di fogli di calcolo e l'inserimento di funzioni da input nella barra apposita presente nella parte bassa della finestra del software. Inoltre è possibile utilizzare anche la vista Computer Algebra System (CAS) con la quale poter eseguire calcolo simbolico. Attraverso il protocollo di costruzione si possono visualizzare tutti i singoli passaggi effettuati durante la costruzione del progetto e posso anche essere riprodotti in sequenza come fosse un video che mostra l'intera costruzione.

Recentemente nei libri di testo vengono proposti esercizi da svolgere con l'utilizzo del software Geogebra, a conferma della notevole diffusione che sta avendo in tutte le scuole del territorio nazionale.

Esempio 1

Disegna un triangolo qualsiasi sul piano cartesiano, individua circocentro, ortocentro e baricentro, come sono i tre punti individuati? Disegna la retta che passa per questi tre punti e verifica che, modificando il triangolo, questa retta continua a passare sempre per gli stessi tre punti.

Hai trovato la retta di Eulero.

Soluzione

Si disegna un triangolo qualsiasi con il tasto poligono individuando tre punti casuali nel piano. Si tracciano i tre punti notevoli eseguendo le adeguate costruzioni e si uniscono con una retta. Modificando i vertici del triangolo si nota che la retta passa sempre per tutti e tre i punti. Questa è proprio la retta di Eulero.

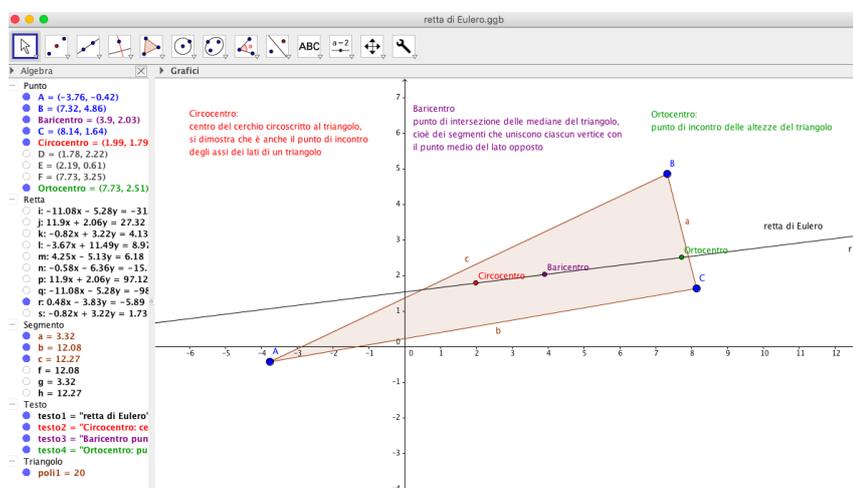


Figura 3.19: Retta di Eulero

Esempio 2

Disegna il grafico della seguente funzione

$$f(x) = 10(x - 1)^2 e^{-x}$$

e determina l'equazione della tangente ad $f(x)$ in un punto T di ascissa variabile.

Soluzione

Per rappresentare la funzione la si definisce nella barra di input in fondo alla finestra principale, poi si definisce uno slider che si denomina xT in modo tale da farlo variare nella parte positiva dell'asse x . Si definisce poi il punto T digitando in input $T=(xT, f(xT))$, fatto ciò si può procedere al calcolo della derivata digitando $g(x)=\text{Derivata}[f(x)]$, così facendo nella finestra Algebra comparirà la derivata calcolata dal software, si può quindi andare a calcolare la derivata nel punto xT inserendo in input $m=g(xT)$, questo corrisponderà anche al coefficiente angolare della retta tangente ad $f(x)$ nel punto T perciò si può definire la retta tangente ad f in T , $t: y=m*(x-xT)+f(xT)$.

In tal modo si può leggere a schermo una qualsiasi equazione della retta tangente ad $f(x)$ in un qualsiasi punto appartenente alla funzione.

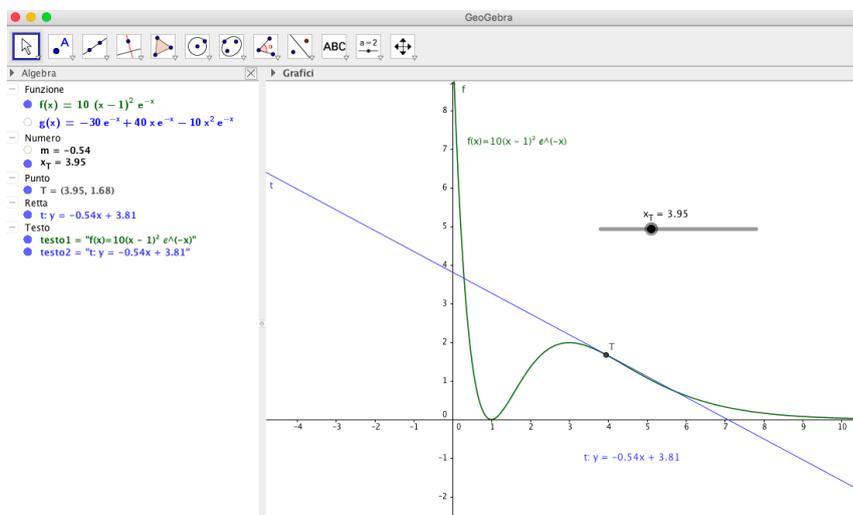


Figura 3.20: Derivata di $f(x)$ nel punto T

Esempio 3

Utilizzando le viste Grafici e Grafici 3D, disegna una circonferenza nella vista grafici, poi nella vista grafici 3D disegna un cono e un cilindro con stessa base, quella disegnata, e stessa altezza, a piacere. Una volta disegnato, usa il foglio di calcolo e indica in caselle diverse il raggio, l'altezza, l'area di base, il volume, la superficie totale e la superficie laterale di cono e cilindro. Assicurati che al variare della figura varino anche i dati nel foglio di calcolo. Cosa noti nei volumi dei due solidi?

Soluzione

Creata una circonferenza nella vista grafici, si deve disegnare un piano parallelo a quello a cui appartiene la circonferenza nella vista grafici 3D, fatto ciò si ha un punto di intersezione del piano con l'asse z, questo determinerà l'altezza del cilindro che serve per la costruzione di quest'ultimo con il comando apposito (Cilindro). Per disegnare il cono si seleziona il comando cono e si sceglie la stessa altezza e lo stesso raggio indicandolo con la lettera che indica il segmento-raggio. Si passa poi a misurare il raggio della circonferenza di base e all'inserimento dei dati nel foglio di calcolo con il relativo richiamo degli stessi dalla vista algebra in modo da avere un cambiamento dei dati nel foglio di calcolo nel momento in cui viene modificata la figura. Vengono infine immesse le funzioni per il calcolo di superfici e volume sempre richiamando le caselle contenenti i dati che si riferiscono alla figura. Si nota che il volume del cilindro è il triplo di quello del cono.

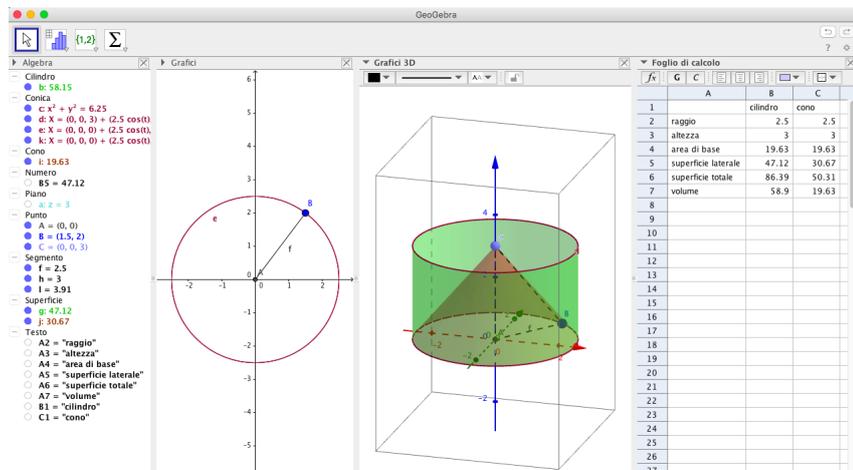


Figura 3.21: Cilindro e cono con stessa base e stessa altezza

3.11 Scratch

Mitchel Resnick, insieme al suo gruppo Lifelong Kindergarten del MIT Media Lab, nel 2003 sviluppò un nuovo linguaggio di programmazione, Scratch. Alla presentazione del programma in una conferenza organizzata dall'azienda Technology Entertainment Design (TEDx) tenutasi in Massachusetts, Resnick fece un'analogia tra la programmazione e la lettura e la scrittura, dicendo che *"quando si impara a leggere e scrivere, si aprono nuove opportunità per imparare molte altre cose. Quando si impara a leggere, allora si potrà anche leggere per imparare. E imparare a programmare è la stessa cosa. Quando si diventa fluenti a leggere e scrivere non lo si fa solamente per diventare uno scrittore di professione. Poche persone diventano scrittori di professione. Ma imparare a leggere e scrivere è utile a tutti. Ed è la stessa cosa per la programmazione. La maggior parte delle persone non diventerà un esperto di informatica o un programmatore, ma l'abilità di pensare in modo creativo, pensare schematicamente, lavorare collaborando con gli altri [...] sono cose che le persone possono usare, indipendentemente dal lavoro che fanno."*

Scratch è programma gratuito che viene utilizzato in oltre 150 paesi ed è disponibile in più di 40 lingue diverse, questo grazie anche ai tantissimi utenti che collaborano con l'azienda traducendo il programma in moltissime lingue che possono anche essere migliorate o incrementate da altri utilizzatori.

La sua particolarità risiede nella semplicità di approccio iniziale ed è stato studiato per i bambini dagli 8 ai 12 anni (ma viene utilizzato da persone di tutte le età) per insegnare un metodo di pensiero creativo, la collaborazione

e il ragionamento sistemico. È una programmazione a blocchi, dove i piccoli utenti devono incastrare i blocchi l'uno con l'altro per creare il codice. Ciò permette ai bambini di creare storie interattive, animazioni, giochi e tanto altro, sempre divertendosi. Ogni blocco rappresenta un comando che può essere modificato o anche ripetuto. Il progetto è ispirato alla teoria costruzionista dell'apprendimento secondo cui l'apprendimento avviene attraverso la costruzione di modelli mentali, in Scratch questi modelli sono i blocchi dei comandi disegnati quasi come fumetti e colorati con colori diversi in base alla funzione. Nato come strumento puramente educativo, ha avuto una notevole diffusione con l'utilizzo da parte di piccoli e grandi sia a scuola, sia a casa. Il software è disponibile per tutti i principali sistemi operativi e anche direttamente online nella pagina ufficiale.

I blocchi che vanno a creare il codice, sono creati in modo tale da incastrarsi l'un l'altro solo se inseriti nel modo giusto, in questo modo si evitano gli errori di sintassi tipici dei linguaggi di programmazione soliti e si imparano le regole di costruzione e di conseguenza anche le logiche necessarie per la realizzazione dell'idea che abbiamo in mente. C'è anche la possibilità di condividere i propri progetti sul web in modo da far vedere il proprio lavoro ma anche da poter modificare a piacere un lavoro già presente. È accessibile a tutti un'intera comunità di studenti, genitori e insegnanti che utilizzano il software e propongo materiali e idee sempre diverse, una di queste comunità molto apprezzata e seguita dagli insegnanti è Scratch Lab, il laboratorio Italiano di ricerca e sperimentazione di Scratch per la didattica, che mette a disposizione degli insegnanti attività e spunti per le loro lezioni in classe con l'uso di Scratch. Questa comunità mette anche a disposizione vari lavori creati da diverse classi italiane. Tutti questi progetti possono essere visualizzati sì come prodotto finale, ma, cosa più importante, anche nella struttura, è infatti possibile accedere al codice per vedere la composizione dei blocchi e anche modificarla a proprio piacere per creare nuovi progetti e magari ricondividerli.

La grafica del programma è davvero molto semplice ed intuitiva, la schermata viene divisa in tre parti:

- l'area di lavoro dove man mano si può veder il risultato finale del progetto;
- l'elenco dei comandi nel centro della pagina, pronti per essere utilizzati;
- la zona del codice dove vengono trascinate e composte le varie istruzioni.

In basso a sinistra si può scegliere uno sprite, cioè l'oggetto da animare con movimenti e suoni. Al centro, in alto, invece troviamo tre etichette che fanno

riferimento a tre menù diversi: script, costumi, suoni. Nella prima si possono scegliere i movimenti, il suono e le azioni da far compiere allo sprite, nella sezione costumi si possono scegliere appunto vari costumi per lo script e nella sezione suoni si possono scegliere delle tracce audio per progetto. Nell'area di lavoro è anche consultabile una guida per eventuali dubbi sui vari comandi in modo da avere a portata di mano tutte le funzionalità del programma.

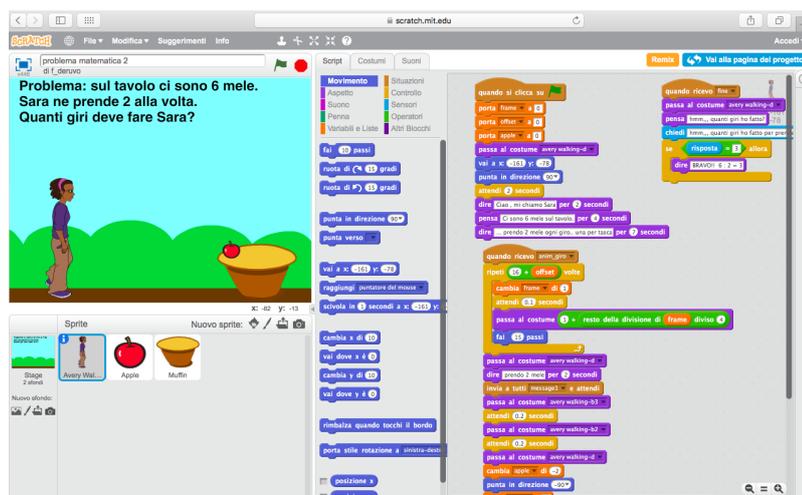


Figura 3.22: Composizione grafica di Scratch online con progetto condiviso sul portale¹⁰

Questo programma può essere utilizzato in tantissimi modi differenti, sia per creare storie animate ma anche per il problem solving, attraverso l'interattività dell'utente con lo sprite preferito. I bambini così facendo imparano non solo a creare una storia interattiva da soli, senza cercare online cose già pronte, ma anche a sperimentare con mano la costruzione della struttura del codice e modificarla a piacere per realizzare le proprie idee.

¹⁰Progetto condiviso dall'utente f_deruvo: <https://scratch.mit.edu/projects/93730711/#editor>

3.12 Code.org

Code.org è una associazione non-profit fondata nel 2013 da Hadi Partovi e Ali Partovi il cui scopo principale è quello di incoraggiare le persone, soprattutto gli studenti, ad imparare la programmazione informatica. Il progetto iniziale era di costruire un "raccolgitore" di tutta la programmazione informatica di tutte le classi degli Stati Uniti. Prima di intraprendere questo progetto Hadi Partovi constatò che il 90% delle scuole americane non insegnava programmazione nonostante oggi sia molto importante. Un mese dopo il rilascio della prima versione, gli sviluppatori caricarono online nel sito ufficiale un video, i cui protagonisti erano Mark Zuckerber (fondatore di Facebook), Bill Gates (cofondatore di Microsoft), Jack Dorsey (cofondatore di Twitter) e altri programmatori. Questi spiegavano l'importanza di imparare a programmare. Da quel momento in poi ci fu una crescita esponenziale delle visite al sito ufficiale, sempre più persone, e soprattutto scuole, si avvicinarono al mondo della programmazione tramite l'utilizzo di Code.org. Inoltre ricevette donazioni di diversi milioni di dollari che portarono ad uno sviluppo sempre maggiore del programma e a partnership per l'utilizzo di personaggi di cartoni animati come Frozen o di personaggi di giochi come Minecraft o Angry Birds per farli diventare protagonisti di progetti da creare online, da far muovere, disegnare, scoprire, spostare oggetti e personaggi nei progetti di milioni di bambini.

Il programma è disponibile solo online sul sito ufficiale, dove sono presenti diversi percorsi suddivisi tra studenti e insegnanti e per fasce d'età. Sono tutti percorsi che prevedono lezioni, con corsi da 20 ore divisi per gradi e livelli di difficoltà, ognuno ha i propri scopi e utilizza difficoltà di livello adeguato all'età. accedendo ai percorsi si trovano gli elenchi delle lezioni proposte con i relativi scopi. Per talune lezioni sono presenti anche delle attività di tipo tradizionale da fare in classe, con relativo pdf scaricabile da parte dell'insegnante con tutte le istruzioni da dare agli alunni. Ogni lezione ha dei livelli da superare per poter proseguire e man mano la difficoltà aumenta. Nelle lezioni iniziali per la prima fascia d'età, quella prescolare, non sono presenti codici da scrivere essendo questa una fascia d'età in cui i bambini stanno ancora imparando a leggere e non sanno ancora scrivere, così i livelli proposti sono dei quiz a risposta multipla con disegni, colori e attività molto intuitive per attrarre il bambino al programma giocando, oppure dei pseudo codici con blocchi da incastra, ma qui, a differenza dei blocchi che poi compariranno in altri livelli, sono presenti solo immagini e frecce. In tal modo i bambini possono intuire dai disegni cosa fare anche senza lo scoglio della lettura non ancora affrontato. Crescendo con i livelli compare la tipica schermata di Code.org, una finestra suddivisa in quattro parti: sulla

sinistra c'è un riquadro in cui il programma viene eseguito, sotto questo c'è la spiegazione dell'esercizio con le istruzioni, al centro si trova la cassetta degli attrezzi, dove ci sono i blocchi di istruzioni da scegliere e trascinare nella parte destra, l'area di lavoro, il foglio bianco su cui comporre il codice con tutti i blocchi incastrati fra di loro. All'inizio di ogni livello compare sempre un video introduttivo che spiega cosa si andrà a fare/eseguire nelle lezioni che seguono. Finito il video compare una finestra in rilievo, la consegna dell'esercizio che poi andrà a posizionarsi, più in piccolo, sotto il riquadro dove il programma viene eseguito. Nella finestra principale si possono anche ottenere degli aiuti qualora ce ne fosse bisogno, infatti sotto alla consegna compare un video che l'utente può consultare per ricevere spunti ed idee per completare l'esercizio.

La particolarità di questo programma, come insegnante, è proprio quella di poter registrare la propria classe e far accedere ogni alunno con il proprio id e password così da far loro completare i vari livelli per gradi con le adeguate spiegazioni fornite molto bene ed esplicitamente dai video e dalle introduzioni agli esercizi. Questo è possibile anche grazie a Programma il Futuro, un progetto intrapreso dal MIUR con la collaborazione del Consorzio Interuniversitario Nazionale per l'Informatica (CINI), parte integrante de La Buona Scuola, in linea con il Piano Nazionale Scuola Digitale, che porta la programmazione nelle scuole attraverso l'accesso a Code.org e alle sue "lezioni di codice".

Il progetto nasce nel 2014 con il focus principale di portare l'insegnamento della programmazione in tutte le scuole, in particolare nella nota del 2014 si richiede la sperimentazione dell'introduzione dei concetti di base dell'informatica con la programmazione (o coding) per far diventare tutti consapevoli di poter essere creatori, oltre che fruitori, di applicazioni e programmi. Il progetto venne poi ripreso dalla circolare del MIUR dell'8 ottobre 2015¹¹ dove si invitano le scuole e i docenti a partecipare con le rispettive classi al progetto Programma il Futuro per sviluppare il pensiero computazionale dei ragazzi in modo attivo e divertente.

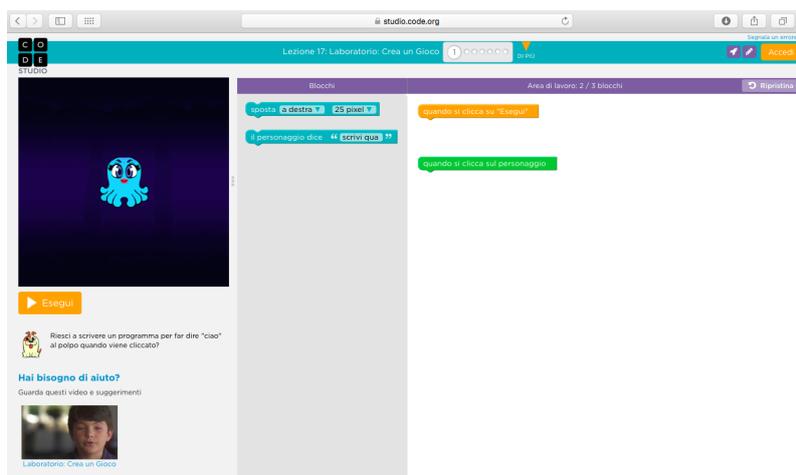
Nell'anno scolastico 2014/2015 prende il via il progetto sotto il nome "*Ora del codice*"¹², un'ora, possibilmente ogni settimana, in cui accedere al portale Code Studio in cui sono presenti le lezioni create apposta per le classi, e in cui completare le attività. Nei casi di scuole non ancora dotate di strumentazioni adeguate alla fruizione delle lezioni, sono disponibili anche lezioni da svolgere in classe senza l'utilizzo di device. L'obiettivo è quello di coinvolgere

¹¹Protocollo n. 9759

¹²L'iniziativa The Hour of Code nasce negli USA nel 2013 per far partecipare tutte le scuole americane ad una introduzione di base al pensiero computazione in ogni grado scolastico.

sempre più classi nel corso degli anni scolastici, a partire proprio dalle scuole primarie. Nella circolare del 2015 si legge che "la partecipazione al progetto per l'anno scolastico 2014/2015 era stata attivata da oltre 300'000 studenti, da 2000 scuole italiane" e più in generale "da più di 100 milioni di studenti in tutto il mondo".

In figura si può osservare la schermata di una lezione tipo fruibile dal sito ufficiale del programma www.code.org.



Capitolo 4

Unità didattica: Probabilità

In questa sezione verrà descritta un'unità didattica di matematica riguardante la probabilità per le scuole secondarie di secondo grado in particolare finalizzata all'apprendimento della probabilità e del calcolo combinatorio e di come le tecnologie possono essere utilizzate per raggiungere la piena comprensione degli argomenti trattati. L'unità didattica sarà composta da:

- descrizione del contenuto;
- descrizione dei prerequisiti che gli alunni devono avere già appreso nel corso della loro carriera scolastica;
- specificazione degli obiettivi che ci si propone di raggiungere;
- tecniche di insegnamento che verranno utilizzate;
- determinazione di spazi e tempi necessari per svolgere le varie attività;
- descrizione dei materiali che vengono utilizzati per le lezioni;
- tipo di valutazione che si intende predisporre;
- eventuale recupero per gli studenti che non sono riusciti a raggiungere gli obiettivi.

Per l'insegnamento della probabilità nelle scuole secondarie di secondo grado le Indicazioni Nazionali per i Licei prevedono, per la disciplina matematica, la conoscenza di base del calcolo delle probabilità. In particolare si richiede nel il primo biennio, per la parte di dati e previsioni: *"lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e*

quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti. Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici. Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica"¹.

Nel secondo biennio le richieste presenti nel Piano sono più specifiche, infatti si legge: *"lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico"¹.*

Durante il quinto anno, sempre in ambito dati e previsioni, *"lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson). In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi"¹.*

Focalizzando l'attenzione sul secondo biennio, dalle Indicazioni Nazionali si possono distinguere tre Unità didattiche:

1. statistica;
2. calcolo combinatorio;
3. calcolo delle probabilità.

Si prende in esame la terza unità didattica, **calcolo delle probabilità**, questa sarà rivolta agli studenti della scuola secondaria di secondo grado frequentanti il 4°anno.

¹Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per il Liceo Scientifico, fonte:
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico.pdf

4.1 Contenuto e prerequisiti

Gli argomenti trattati nell'unità didattica sono:

- eventi aleatori,
- spazi campionari,
- varie definizioni di probabilità,
- principali teoremi della probabilità,
- probabilità condizionata,
- eventi dipendenti o indipendenti,
- probabilità composta,
- formula di Bayes e relative applicazioni,
- uso del calcolo combinatorio per la probabilità.

Tra i prerequisiti di base che certamente servono per affrontare questi argomenti c'è il calcolo algebrico e insiemistico con le relative operazioni tra insiemi. Il calcolo combinatorio solitamente costituisce l'unità didattica immediatamente precedente a quella sulla probabilità, quindi gli alunni devono avere ben chiari i concetti di disposizioni semplici e con ripetizione, di combinazioni semplice e con ripetizione e il relativo calcolo. Inoltre devono anche conoscere le permutazioni, i coefficienti binomiali con le relative proprietà e la regola per lo sviluppo della potenza di un binomio (c.d. "formula di Newton"). Per la parte degli esercizi è necessario per gli alunni saper utilizzare il funzionamento di base del foglio di calcolo.

4.2 Obiettivi

Come si è visto dalle Indicazioni Nazionali, non è la prima volta che i ragazzi affrontano la probabilità durante il corso della loro formazione scolastica, infatti le nozioni di base vengono apprese nel primo biennio e anche nel ciclo di studi precedente, nella scuola secondaria di primo grado. Per questo motivo uno degli obiettivi principali è l'approfondimento degli argomenti che costituiscono il calcolo delle probabilità, il calcolo di probabilità condizionate e composte e il saper applicare la formula Bayes.

In particolare, facendo riferimento alla tavola tassonomica riportata qui sotto², si vogliono raggiungere competenze cognitive elementari ed intermedie, così come quelle superiori convergenti e divergenti.

1. Il conoscere (apprendimenti elementari)	1.1 Memorizzazioni	1.1.1 riprodurre/ripetere termini	
		1.1.2 riprodurre/ripetere simboli	
		1.1.3 riprodurre/ripetere concetti	
	1.2 Automatismi cognitivi	1.2.1 classificare secondo un criterio noto	
		1.2.2 ordinare secondo un criterio noto	
	1.3 Operazioni	1.3.1 eseguire operazioni elementari	
		1.3.2 eseguire operazioni concatenate	
	1.4 Concetti	1.4.1 definire un concetto	
		1.4.2 riconoscere un concetto	
		1.4.3 esemplificare un concetto	
	2. Il comprendere (apprendimenti intermedi)	2.1 Comprensione	2.1.1 descrivere ragionamenti/procedimenti
			2.1.2 riconoscere situazioni/procedimenti
2.1.3 tradurre situazioni/procedimenti			
2.2 Applicazione		2.2.1 eseguire/applicare procedimenti	
		2.2.2 applicare procedimenti noti in ambiti nuovi	
		2.2.3 verificare procedimenti	
3.1 Il pensiero convergente (apprendimenti superiori convergenti)	3.1.1 Analisi	3.1.1 analizzare	
		3.1.2 confrontare	
		3.1.3 impostare un ragionamento induttivo	
	3.1.2 Sintesi	3.2.1 sintetizzare	
		3.2.2 schematizzare	
		3.2.3 impostare un ragionamento deduttivo	
3.2 Il pensiero divergente (apprendimenti superiori divergenti)	3.2.1 Intuizione	3.2.1.1 tentare soluzioni	
		3.2.1.2 formulare ipotesi	
		3.2.1.3 riconoscere il problema chiave	
	3.2.2 Invenzione	3.2.2.1 estrapolare leggi/principi	
		3.2.2.2 inventare per analogia	
		3.2.2.3 formulare soluzioni nuove	

Figura 4.1: Tavola tassonomica

Per la categoria "*conoscere*", si richiede agli alunni il saper riprodurre le definizioni, i simboli con cui si rappresenta la probabilità e la capacità di saper eseguire operazioni logiche tra gli aventi per il calcolo delle relative probabilità. Nella sezione concernente il "*comprendere*" si focalizza l'attenzione sul saper descrivere i procedimenti da attuare, tradurre situazioni (ad esempio l'applicazione delle regole per la risoluzione di problemi) e saper verificare e applicare i teoremi visti nella teoria. Inoltre si richiede anche l'applicazione

²Fonte: materiale fornito durante il corso di didattica e pedagogia speciale, corso di laurea magistrale in matematica indirizzo didattico, Unibo, A.A. 2015/16, prof.ssa Fabbri Manuela

di procedimenti noti in ambiti nuovi, è questo il caso dell'utilizzo di software per la costruzione e soluzione di problemi in questo caso riguardanti la probabilità. Nell'ambito del "*pensiero convergente*" si richiede sia l'analisi sia la sintesi, infatti è necessario che ogni alunno sia in grado di impostare ragionamenti induttivi e deduttivi, ma che sappia anche sintetizzare il problema che ha di fronte e riesca a schematizzarlo per riuscire a risolverlo con gli elementi di base della probabilità quali eventi composti, condizionati o anche con l'utilizzo di eventi contrari. Infine, gli obiettivi riguardanti il "*pensiero divergente*" riguardano il saper riconoscere il problema chiave come ad esempio nella risoluzione di problemi che necessitano l'applicazione della formula di Bayes, così come il riconoscere particolari procedimenti che possono essere rappresentati dall'utilizzo di eventi contrari o dall'unione di eventi e il relativo calcolo della probabilità.

4.3 Percorso didattico

Avendo a disposizione 4 ore a settimana di matematica, le lezioni vengono così suddivise:

(2 ore in aula)

L'argomento si può introdurre con un breve excursus storico di come è nato il calcolo delle probabilità a partire da metà del 1600 con la richiesta del nobile francese Cavalier di Meré per via epistolare al matematico francese suo amico Blaise Pascal riguardo le scommesse che gli sarebbero convenute nel gioco dei dadi e delle carte. Il Cavalier di Meré era solito scommettere alla pari con chi voleva giocare con lui, sull'uscita di almeno un 6 nel lancio di un dado per 4 volte, vinceva talmente spesso che pian piano nessuno voleva più giocare con lui, così fu costretto a cambiare il suo gioco. Il cambiamento si risolse nella scommessa di uscita di almeno una coppia di 6 nel lancio di 2 dadi per 24 volte. Questa volta però non ebbe altrettanto successo come con la prima scommessa e col passare del tempo si rese conto che la scommessa non era affatto vantaggiosa per lui, infatti perdeva molto più spesso di quanto sperasse, così chiese aiuto a Pascal. Questi, con l'aiuto di Pierre de Fermat, studiò i problemi proposti, e poté infine spiegare come mai la seconda scommessa non fosse vantaggiosa per lui.

Si può provare a chiedere ai ragazzi se possono aiutare il Cavalier de Meré ad aggiustare la scommessa per non fargli perdere tutti i soldi, magari con una simulazione a gruppi, così possono provare a pensare al problema e dopo mezz'ora provare ad esporre le proprie idee agli altri gruppi.

(1 ora in aula)

Vengono introdotte le definizioni utili per il calcolo delle probabilità con

l'utilizzo della LIM e del libro di testo: esperimento aleatorio, spazio campionario, evento aleatorio, eventi incompatibili tra loro (o disgiunti fra loro). Si arriva poi alla definizione classica di probabilità di un evento: rapporto fra casi favorevoli e casi possibili, compresa sempre tra 0 e 1, con relativi esempi e alle altre definizioni utilizzate (frequentista e soggettiva). A seguire vengono svolti una serie di esercizi in cui individuare l'evento o gli eventi di cui calcolare la probabilità e il metodo di calcolo. Dapprima gli esercizi vengono svolti alla lavagna e poi divisi per gruppi in cui ogni gruppo svolge una serie di esercizi preparati appositamente in una scheda dall'insegnante che contiene esercizi con eventi predefiniti ed esercizi in cui si devono individuare gli eventi da utilizzare (ad esempio anche esercizi su estrazione di palline colorate da una o più urne). Assegnazione dei compiti per casa con esercizi della scheda o dal libro di testo.

(1 ora in laboratorio con computer)

Per simulare i lanci di un dado si può utilizzare il foglio di calcolo, Excel, in cui, con la funzione CASUALE si può generare un numero casuale compreso fra 0 e 1 estremi esclusi e, moltiplicandolo per 6, prendendo la parte intera ed aggiungendo una unità si ottiene proprio quello che desideriamo, un numero casuale compreso fra 1 e 6, inoltre si possono far costruire delle tabelle con i risultati di più lanci, le frequenze di uscita di ogni numero in determinati lanci. In questo modo i ragazzi possono costruire la simulazione da soli con l'utilizzo del software. Con questo si può accennare anche alla distribuzione di frequenza costruendo un grafico dei risultati ottenuti dai "lanci" ripetuti (l'argomento verrà poi ripreso durante l'anno scolastico successivo). Sempre nello stesso esercizio, si può richiedere il calcolo della probabilità di uscita di un numero in determinati lanci con uno o più dadi. Questo tipo di esercizio serve agli alunni per avere la possibilità di simulare un numero anche elevato di lanci di uno o più dadi, cosa non possibile con un esperimento manuale perché richiederebbe troppo tempo per i lanci e l'elaborazione dei dati.

(2 ore in aula con tablet + 1 ora se necessaria per finire la risoluzione dei problemi)

Controllo e correzione dei compiti svolti a casa con chiarimenti di eventuali dubbi degli alunni.

Si presentano i due teoremi fondamentali per le basi del calcolo delle probabilità:

- **Teorema sulla probabilità dell'evento contrario**

Sia E un evento di probabilità p ($P(E)=p$), allora la probabilità del complementare di E (o evento contrario di E) sarà $1-p$

$$P(E) = p$$

$$P(\bar{E}) = 1 - p.$$

- **Teorema della probabilità totale**

Siano A e B due eventi appartenenti allo stesso spazio campionario Ω , allora la probabilità dell'unione dei due eventi è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi a cui viene sottratta la probabilità dell'intersezione dei due eventi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Una volta presentati i due teoremi con le relative dimostrazioni nelle situazioni più semplici, si svolgono esercizi in cui serve la loro applicazione, prima presentati alla LIM con l'utilizzo del software Wolfram Alpha dal docente in modo da mostrare le funzioni principali utilizzabili dai ragazzi, poi viene suddivisa la classe a gruppi di tre alunni, con un device mobile ogni gruppo (tablet o pc portatile). Ad ogni gruppo vengono assegnati due esercizi in cui devono applicare i teoremi appena visti, per la risoluzione possono utilizzare sia il foglio di calcolo Excel sia il software online Wolfram Alpha e devono inserire le soluzioni in un documento di testo che contenga le foto dei procedimenti utilizzati nei diversi software impiegati e inviarlo al docente tramite l'applicativo online della scuola, ad esempio Moodle, nella relativa consegna del compito. Se non si riesce a completare il compito in aula, si richiede di finirlo a casa e di consegnarlo entro la lezione successiva, compatibilmente con la programmazione oraria. Questi verranno corretti e valutati dall'insegnante e verranno ripresi in classe eventuali errori di svolgimento.

Ad esempio, con Excel si possono far risolvere degli esercizi riguardanti il primo teorema, infatti una volta scritti in caselle separate i dati e la probabilità dell'evento E , la probabilità di \bar{E} si può far calcolare semplicemente richiamando i dati della prima probabilità e impostando la formula che sottrae il primo dato ad una unità ($1 -$ (casella del valore di $P(E)$)).

Probabilità contraria									
Home Inserisci Layout di pagina Formule Dati Revisione Visualizza									
M21	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Problema:							
3		Un'urna contiene	60		palline				
4		20 nere							
5		25 gialle							
6		15 rosse							
7		Calcola la probabilità di estrarre una pallina gialla o rossa.							
8									
9		Eventi:					Probabilità:		
10		E = estraggo una pallina nera					P(E) = 20/60 =	0,3333	
11		contrario di E = \bar{E} = estraggo una pallina gialla o rossa					P(\bar{E}) = 1 - 20/60 =	0,6667	
12									

Con Wolfram Alpha invece si possono far svolgere esercizi riguardanti il secondo teorema, sulla probabilità dell'unione di due eventi. Un esempio è mostrato nell'immagine seguente:

 computational knowledge engine

probability of the union of two events

Assuming probability of the union of two events | Use [probability of the union of two independent events](#) instead

Calculate

- probability of A:
- probability of B:
- probability of A∩B:

Input interpretation:
probability of the union of two events

Equation:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A \cup B)$	probability of $A \cup B$
$P(A)$	probability of A
$P(B)$	probability of B
$P(A \cap B)$	probability of $A \cap B$

Input values:

probability of A	0.4
probability of B	0.6
probability of $A \cap B$	0.3

Result: 0.7 Step-by-step solution

In questo caso gli alunni devono dapprima calcolare le tre probabilità da utilizzare per il calcolo della probabilità finale e poi inserirle nell'applicativo. Le tre probabilità da inserire, possono anch'esse essere calcolate con il software, in base all'esercizio.

(1 ora in aula)

Spiegazione in classe con l'utilizzo della LIM della probabilità condizionata: dati due eventi A e B, si chiama probabilità condizionata di A rispetto a B, $P(A|B)$, la probabilità che si verifichi l'evento A sapendo che si è già verificato l'evento B e, posto che la probabilità che si verifichi B è diversa da zero, allora si può calcolare la probabilità condizionata come:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

in più si può calcolare anche l'altra probabilità condizionata, $P(B|A)$, avendo sempre cura di avere $P(A) \neq 0$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Da qui si possono poi introdurre osservazioni riguardanti eventi dipendenti ed indipendenti: due eventi si dicono indipendenti se $P(A|B) = P(A)$, se invece sono dipendenti l'uguaglianza non è più verificata.

Infine si arriva alla probabilità composta, cioè, dati due eventi A e B, allora il calcolo della probabilità dell'intersezione dei due eventi vari a seconda se i due eventi sono tra loro dipendenti o indipendenti.

Se A e B sono dipendenti tra loro

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A),$$

se invece sono indipendenti, più semplicemente:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Si prova facilmente che quest'ultima formula equivale all'indipendenza di A e B; anzi spesso è quest la definizione di indipendenza di A e B.

A seguire si possono svolgere vari esempi ed esercizi presi dal libro di testo per far capire meglio i concetti, prima individualmente, poi svolti alla lavagna dai ragazzi per correggere eventuali errori, dubbi e disattenzioni che emergono dai procedimenti che vengono attuati.

Alcuni esercizi tipo possono essere quelli in cui si considera l'estrazione consecutiva di più biglie colorate e si chiede di calcolare la probabilità di ottenere

esattamente un certo numero di biglie di un colore e un certo altro numero di un colore diverso. Ma anche esercizi con biglie, dadi, carte o semplicemente eventi generici con probabilità nota. Assegnazione dei compiti per casa con esercizi specifici sull'argomento trattato.

(1 ora in aula)

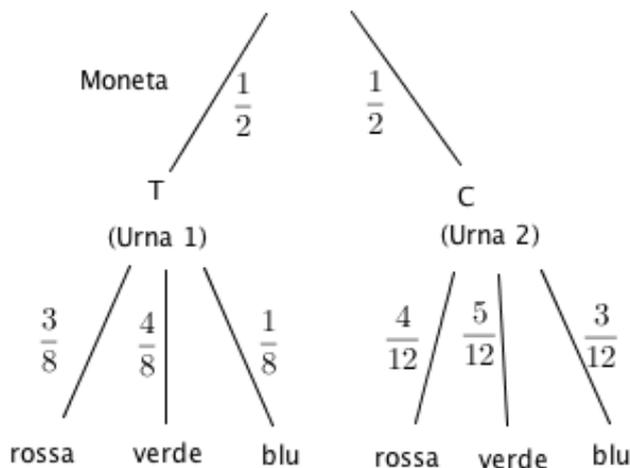
Controllo e correzione dei compiti per casa per chiarire i dubbi.

Presentazione della formula di Bayes con l'utilizzo di alcuni esercizi in cui è necessaria la sua applicazione.

Ad esempio:

Ci sono due urne contenenti palline di colori diversi, nella prima urna ci sono 3 palline rosse, 4 verdi e 1 blu, nella seconda urna invece 5 sono verdi, 4 rosse e 3 blu. Per decidere da quale urna estraggo una pallina tiro una moneta e se esce testa pesco dalla prima urna, se esce croce pesco dalla seconda. Se ho pescato una pallina rossa, qual è la probabilità che abbia pescato dalla prima urna? Qual è la probabilità di pescare una pallina blu indipendentemente dalla moneta?

La presenza fisica in classe delle due urne con le palline colorate e la "rappresentazione" dell'esperimento da alcuni allievi contribuirà al miglioramento dell'attenzione e del coinvolgimento di tutta la classe. Una volta messo in scena l'esercizio ed eventualmente segnati alla lavagna i dati e le frequenze, si passa alla risoluzione mediante un grafico con le relative probabilità



Una volta costruito lo schema, nel margine destro si possono calcolare le relative probabilità di pescare una pallina rossa dalla prima urna, oppure una verde oppure una blu e lo stesso si fa per la seconda urna. Queste probabilità

si calcolano moltiplicando la probabilità che esca testa con la probabilità di estrarre la pallina rossa nella prima urna, questo per tutti i colori e le urne. Quindi la probabilità di estrarre dalla prima urna (cioè che sia uscita Testa) sapendo di aver pescato una pallina rossa è:

$$P(\text{Testa}|\text{rossa}) = \frac{P(\text{Testa}) \cdot P(\text{rossa}|\text{Testa})}{P(\text{Testa}) \cdot P(\text{rossa}|\text{Testa}) + P(\text{Croce}) \cdot P(\text{rossa}|\text{Croce})}$$

quindi

$$P(\text{Testa}|\text{rossa}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{12}} = \frac{9}{17} \sim 0,529.$$

In questo modo si introduce la formula di Bayes che si può formalizzare in questo modo:

siano A e B due eventi tali che $P(B) > 0$, allora vale

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

detta *formula di Bayes*.

Questa si può ottenere dalla formula della probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(AB) = P(B|A)P(A)$$

quindi

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

In generale si può definire anche come la probabilità che, verificatosi un evento B, la causa che lo ha scatenato sia A_i , con $i=1, \dots, n$, e: A_i, A_j a due a due disgiunti, $B \subseteq \cup_{i=1}^n A_i$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}.$$

Una volta spiegati tutti i passaggi si fanno degli esempi alla LIM, alcuni fatti direttamente dai ragazzi con la formula sempre presente nella schermata.

Per esercitarsi si possono dividere a gruppi e creare un file Excel in cui risolvono un esercizio in cui sia necessaria la formula di Bayes ma con la particolarità che possa essere usato anche come griglia universale di base in cui inserire solo le probabilità nelle caselle appropriate e che sia sfruttabile per altri esercizi. Per prima cosa, svolti gli esercizi alla lavagna, viene mostrato dal docente un esempio di quello che dovranno poi svolgere loro a gruppi. Poi in piccoli gruppi, con un pc ogni gruppo possono costruire la soluzione. Ovviamente devono partecipare tutti i membri di ogni gruppo e inizialmente svolgere l'esercizio nel quaderno, per avere una visione più chiara di cosa servirà inserire nel foglio di calcolo e cosa invece programmare che venga eseguito in automatico.

Un esercizio molto utile che si può far fare agli alunni come compito per casa, una volta svolti alcuni esercizi per far capire il meccanismo di calcolo, è quello di far creare direttamente a loro un esercizio da proporre ai compagni, in cui sia utile utilizzare questa formula per la soluzione. Possono prendere spunto dagli esercizi presenti nel libro di testo (suddivisi per argomento) o anche dagli esercizi proposti a lezione dall'insegnante (diversi da quelli del libro di testo). Ogni alunno crea un esercizio in un foglio e scrive la soluzione in un foglio separato. Questi verranno poi ritirati e controllati dall'insegnante per correggere eventuali errori insieme agli inventori dell'esercizio, fatto ciò, verranno distribuiti ai compagni durante la lezione successiva come esercizio in classe sulla formula di Bayes.

(2 ore in aula)

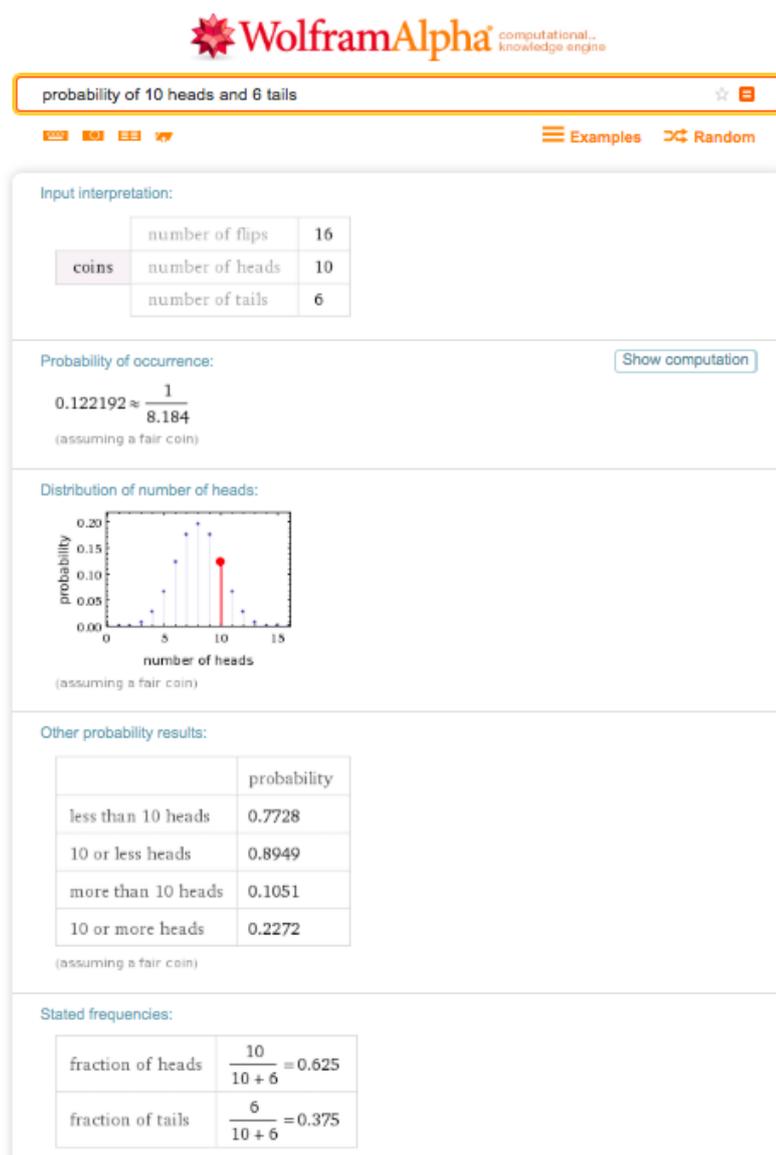
In questa nuova lezione ci si dedica allo svolgimento degli esercizi creati dagli alunni, poi ci si dedica ad esercizi che necessitano del calcolo combinatorio per il calcolo di talune probabilità, argomento già affrontato nell'unità didattica precedente. Durante la prima ora vengono svolti esercizi alla lavagna dal docente per spiegare metodologie e applicazioni del calcolo combinatorio per determinare casi favorevoli e casi possibili, invece durante la seconda ora vengono svolti altri esercizi, individualmente da ogni alunno, così l'insegnante riesce anche, girando tra i banchi a controllare gli svolgimenti e a correggere errori e fraintendimenti evitando lacune e sedimentazione di procedimenti sbagliati. Se gli errori frequenti lo rendono necessario, è utile riprendere qualche concetto di calcolo delle probabilità e spiegarne l'utilizzo per problemi specifici. Infine vengono assegnati esercizi per casa da svolgere per la lezione successiva.

(1 ora in aula + 1 ora in laboratorio)

Correzione degli esercizi svolti a casa e svolgimento di esercizi generici sulla probabilità in preparazione alla verifica, sia alla lavagna sia individualmente. Nell'ora in laboratorio si svolgono esercizi preparati in precedenza dal docente in modo da poter essere svolti agilmente dagli alunni con l'utilizzo

di Excel e Wolfram Alpha.

L'applicativo online Wolfram Alpha può essere utilizzato, ad esempio, per il calcolo della probabilità di uscita di un determinato numero di teste su di una quantità finita di lanci a piacere: in questo caso sono state calcolate le



probabilità di ottenere esattamente 10 teste (in inglese heads) e 6 croci (in inglese tails, probabilmente dalla vecchia sterlina in cui un lato era occupato da un leone con la coda dritta) in 16 lanci.

Sempre tramite l'applicativo online si possono anche calcolare le probabilità

di ottenere ad esempio 10 come somma dell'esito del lancio di due dadi oppure si può sfruttare per il calcolo combinatorio utile per alcune probabilità. Come questi anche molti altri esercizi si possono svolgere in questa modalità, un possibile ulteriore scoglio che i ragazzi troveranno sarà la lingua, infatti l'applicativo è solo in inglese e questo li porterà anche alla ricerca dei termini inglesi che gli servono per le varie risoluzioni. Se da un lato questo può apparire come un ostacolo, dall'altro è anche una opportunità per avere lo stimolo allo studio di una lingua attualmente universale nella diffusione della scienza.

4.4 Valutazione

La valutazione di tipo formativo viene attuata durante il corso delle lezioni, con il controllo da parte dell'insegnante, del raggiungimento degli obiettivi principali da parte di tutti gli alunni. Questo avviene sia attraverso gli esercizi svolti in classe alla lavagna e individualmente, sia quelli svolti a casa, sia attraverso l'osservazione di ciascun alunno nello svolgimento dei differenti lavori a gruppi. L'insegnante correggerà man mano gli errori commessi dagli alunni con opportune spiegazioni, esercizi spiegati alla lavagna per tutti e correzione individuale con chiarimenti dei dubbi insorti durante tutto il corso delle lezioni.

Inoltre alla fine delle lezioni programmate come sopra, seguono due ore di verifica sommativa, una in aula e una con i software utilizzati durante le lezioni. Nella prima si propone una scheda con elementi di teoria ed esercizi che vanno a verificare tutti gli obiettivi previsti dall'unità didattica riprendendo la tipologia di esercizi svolti in classe. La seconda verifica sarà invece svolta in laboratorio, con un alunno per ogni postazione pc. Qui vengono distribuite schede con esercizi da risolvere con Excel e Wolfram Alpha simili a quelli svolti in precedenza, con l'obbligo di svolgerne almeno uno con Excel e almeno uno con Wolfram Alpha. Una volta svolti, saranno da raggruppare in un'unica cartella, se sono presenti più documenti, e da inviare online nell'apposita consegna dei compiti preparata precedentemente dal docente.

Se dalle verifiche risultano lacune, si procede al recupero per chi ne ha necessità. Per essere efficace è utile che il recupero sia progettato in base alle lacune e agli errori commessi dagli allievi, quindi un tipo di recupero non generico ma mirato a colmare e correggere. Questo potrà essere fatto dapprima con la spiegazione dei concetti base non ben assimilati qualora ce ne fossero, poi con esercizi svolti da rifare sul quaderno aggiungendo le spiegazioni dei passaggi che vengono fatti e poi con la risoluzione di esercizi preparati appositamente per raggiungere gli obiettivi non ancora raggiunti.

A questa fase di recupero dovrà anche seguire un'ulteriore fase di verifica. Questa verifica dovrà verificare l'effettivo raggiungimento degli obiettivi mancanti. Può essere svolta sia tramite una verifica scritta sia come interrogazione orale in cui gli allievi si alternano alla LIM svolgendo esercizi con le relative spiegazioni della teoria da applicare e utilizzando anche i software sfruttati nel corso delle lezioni.

Conclusioni

Quello che è facile dedurre dai dati raccolti dal MIUR, è la difficoltà nella diffusione delle tecnologie soprattutto nelle classi, infatti meno del 50% delle aule di tutta Italia sono dotate di dispositivi come LIM o proiettori interattivi, invece la connessione è presente nel 70% delle classi. Oltre ai dati però quello che emerge toccando con mano la realtà scolastica di ogni giorno, è il saper utilizzare al meglio questi dispositivi per la didattica e, ancor più importante, la manutenzione di tutti device e dei loro accessori inscindibili. Non basta infatti avere a disposizione tanta tecnologia se poi non viene curata e mantenuta a dovere perché ovviamente nulla dura per sempre, i cavi si rompono, le batterie si scaricano o si fondono, i computer vengono scombinati da un utilizzo non troppo consapevole.

Tutto questo è causa di diverse problematiche e, nel frequente caso in cui l'insegnante non abbia conoscenze sufficienti a ripristinare il corretto funzionamento dell'hardware o del software danneggiato, è necessaria e fondamentale una presenza costante di tecnici competenti all'interno della scuola. Molto spesso, seppur presenti e qualificati "sulla carta", questi non sono disponibili, sono improvvisati, sono tecnici "per passione personale" o addirittura sono presenti ma spesso impegnati a fare altro e il risultato è che in alcune classi ci si trovi a dover utilizzare la LIM solo attraverso il computer a cui è collegata per via delle penne non funzionanti, perdendo tutta l'interattività e la praticità propria dello strumento quindi la sua utilità principale. Oppure in altri casi si è costretti a tornare a gesso e ardesia perché il proiettore non funziona o perché il professore non sa come utilizzare le potenzialità di una lavagna che potrebbe fare "tutto e niente", con l'immaginabile sdegno dei ragazzi che ormai abituati agli strumenti futuristici vengono ricatapultati nell'antico. La formazione dei docenti in questo ambito non solo è importante, è necessaria, fondamentale e imprescindibile poiché a volte la passione non basta, serve qualcuno in grado di comprendere le potenzialità degli strumenti a disposizione, qualcosa che stimoli la creatività degli insegnanti, che sfrutti le possibilità offerte e che mostri come la didattica possa cambiare per stimolare la fantasia e l'inventiva degli alunni.

Non è da intendere però che la tecnologia sia la risposta a tutto. La tecnologia può essere il mezzo per smuovere le acque, per avvicinare gli studenti a qualcosa che altrimenti potrebbe essere ripudiato a priori. Ma le basi vanno poste e ben consolidate prima di tutto. Non si può pensare di aver in mano la bacchetta magica solo perché si utilizza una LIM o un tablet, tutto va misurato e pesato molto attentamente e soprattutto va ben preparato dal docente. Questi infatti deve selezionare gli argomenti che si prestano meglio ad essere introdotti mediante le tecnologie e quelli che invece possono attendere, magari per approfondirne le basi o per uno sviluppo più omogeneo. La cosa più importante, è l'interdisciplinarietà che le tecnologie devono avere all'interno del sistema scolastico. Non possono essere relegate in un laboratorio o solamente ad una lezione di informatica o di tecnologie, è necessario un utilizzo capillare e trasversale in tutte le discipline e in tutta l'istituzione scolastica, dal registro elettronico, alla comunicazione con i genitori, alla spiegazione in classe degli argomenti di tutte le discipline. Serve impegno da parte di tutti, istituzioni, plessi scolastici, docenti, alunni e genitori. Sì, anche i genitori devono fare la loro parte, non è pensabile infatti lasciare i propri figli sempre in balia di se stessi mentre navigano in internet, serve un controllo durante tutta la crescita perché l'educazione tecnologica deve divenire una cosa comune come l'educazione al rispetto e alla condivisione. Nell'era digitale non si può pensare che tutti i bambini nascano sapendo già tutte le "regole del buon navigatore", che abbiano già in mente cosa è giusto e cosa invece non si deve fare online. In rete ormai è possibile fare di tutto, dallo shopping legale a quello illegale all'abbattere barriere e sicurezze che non dovrebbero essere abbattute. È quindi necessaria un'educazione da parte dei genitori che ancora non è scontata, è fondamentale accompagnare i bambini fin da piccoli a navigare online con la loro supervisione e, da parte loro l'utilizzo delle restrizioni a siti e contenuti non adeguati. Tale supervisione, ovviamente, non può essere attuata ventiquattr'ore su ventiquattro, ma può essere attuata in quasi tutti i dispositivi attualmente disponibili in commercio, ad esempio i sistemi di parental control che permettono di creare account con determinate restrizioni impostate dal genitore, evitando così che il bambino scarichi ignaramente virus o che faccia acquisti nei vari store senza il consenso dei genitori o ancora peggio. Tutto questo però non basta da solo, serve anche la presenza fisica del genitore al suo fianco e il cosiddetto "buon esempio" da parte sua per rendere efficace e fruibile nel migliore dei modi il nuovo mondo tecnologico.

Bibliografia

- [1] S. Bagnara, V. Campione, E. Mosa, S. Pozzi, L. Tosi, *Apprendere in digitale*, Guerini e associati, 2014
- [2] N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Lineamenti di matematica*, Ghisetti e Corvi editori, 2000
- [3] P. Ferri, *I nuovi bambini, come educare i figli all'uso della tecnologia, senza diffidenze e paure*, Rizzoli 2014
- [4] M. R. Franceschini, G. Grazi, *Modelli matematici 4, geometria e trigonometria, geometria nello spazio, probabilità*, Atlas, 2013
- [5] P. Ghislandi, *Oltre il multimedia*, FrancoAngeli Hoepli, 2007
- [6] Isfol, *E-Learning e Innovazione*, 2008
- [7] *Indicazioni nazionali per il Liceo Scientifico in*
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico.pdf
- [8] L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di matematica per Licei scientifici sperimentali 1B*, ETAS, 2002
- [9] MIUR - ufficio Statistica e studi
- [10] T.H. Nelson, *Literary Machines 90.1. Il progetto Xanadu*, Muzzio, 1992
- [11] S. Papert, *Mindstorms, bambini computers e creatività*, Emme edizioni, 1984
- [12] D. Rushkoff, *Programma o sarai programmato, dieci istruzioni per sopravvivere all'era digitale*, postmedia books, 2012
- [13] B. F. Skinner, *Studi e ricerche*, Giunti-Barbera, 1976

Sitografia

- [1] Sito ufficiale de "La buona scuola digitale" con Piano Nazionale Scuola Digitale
http://www.istruzione.it/scuola_digitale
- [2] Rivista online per la formazione didattica sulle nuove tecnologie
<http://formare.erickson.it>
- [3] Sito ufficiale della Logo Foundation
<http://el.media.mit.edu/logo-foundation>
- [4] <http://www.torinoscienza.it>
- [5] Intervista a Jean Marie Laborde (ideatore di Cabri)
<http://matematica.unibocconi.it/articoli/intervista-jean-marie-laborde>
- [6] Sito ufficiale del software Cabri
<http://www.cabri.com>
- [7] Archivio della pubblica istruzione
<http://archivio.pubblica.istruzione.it>
- [8] Sito del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR)
<http://hubmiur.pubblica.istruzione.it>
- [9] Sito di raccolta di idee per imprese, finanza e professioni di vario tipo
<http://www.glocus.it>
- [10] Sito dell'organizzazione e dello sviluppo economico
<http://www.oecd.org>
- [11] Sito ufficiale del Software MatLab
<http://it.mathworks.com>
- [12] Sito ufficiale di Wolfram Alpha (e Mathematica)
<http://www.wolfram.com>

- [13] There Was a Time before Mathematica..., 06-06-2013, blog di Stephen Wolfram
<http://blog.stephenwolfram.com/2013/06/there-was-a-time-before-mathematica/>
- [14] Sito ufficiale del software Geogebra
<http://www.geogebra.org>
- [15] Sito ufficiale del software Scratch
<https://scratch.mit.edu>
- [16] Sito ufficiale del software online Code.org
<https://code.org>
- [17] Sito del progetto "Programma il Futuro"
<http://www.programmailfuturo.it>
- [18] Sito per la fruizione di lezioni di coding per il progetto "Ora del Codice"
<https://italia.code.org>