Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Indagine sugli studenti liceali riguardo l'apprendimento del concetto di integrale

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:
Mariachiara Ferrari

I Sessione
Anno Accademico 2015/2016

A Chicco,
per averci fatto assaporare
un pezzo di vita eterna
già su questa terra.

Introduzione

Il calcolo integrale costituisce uno degli argomenti più importanti dell'analisi matematica ed è altrettanto importante per le sue applicazioni in campo fisico e meccanico. Le sue origini vanno ricercate nell'antica Grecia, dove Eudosso e Archimede elaborarono il *metodo di esaustione* per determinare l'area del cerchio, approssimandola a quella di poligoni in esso inscritti, dal numero di lati sempre maggiore. Poi all'inizio del XVII secolo quando Cavalieri sviluppò il *metodo degli indivisibili* mentre Cartesio e Fermat, attraverso operazioni che equivalgono alla nostra integrazione e derivazione, determinarono le aree e definirono le tangenti a curve assegnate.

Newton e Leibniz sono considerati i fondatori del calcolo infinitesimale: oltre al grande sviluppo che operarono nell'uso dei simboli, dimostrarono il *teorema fondamentale del calcolo integrale*, da cui si dedusse che differenziazione e integrazione sono operazioni inverse.
Nel XIX secolo, Cauchy e Riemann diedero in modo rigoroso la definizione di integrale, per poi essere successivamente precisata da Lebesgue che ampliò notevolmente il campo delle funzioni integrabili e la potenza dello strumento.

Dell'aspetto storico della nascita del calcolo integrale si parlerà nel primo capitolo di questa tesi; lo studio della storia serve infatti per sottolineare che la conoscenza della matematica non è chiusa in sè, ma può essere utile a chi la studia per attuare quello che la didattica chiama *transfer cognitivo*. Inoltre, i richiami storici sono fondamentali per mostrare come dietro a un teorema o ad una proprietà ci sono persone che nel corso degli anni si sono poste domande e problemi a cui hanno cercato soluzioni e spiegazioni.

Nel secondo capitolo di questo elaborato vengono accennate alcune proposte didattiche riguardo l'insegnamento degli integrali a ragazzi del quinto anno dei licei scientifici.

Il terzo capitolo è la parte centrale della tesi, contiene infatti un'analisi dettagliata di un questionario sugli integrali somministrato a ragazzi dell'ultimo anno del liceo, proprio per poter *indagare* sull'apprendimento di questo argomento così importante in matematica. Sono stati proposti sette quesiti riguardanti aspetti diversi del calcolo integrale, con lo scopo di poter davvero capire il livello di conoscenza dell'argomento tra gli studenti: su cosa hanno fatto più fatica, quali errori sono stati commessi più frequentemente e a quali misconcezioni possono essere legati, quali sono stati gli aspetti che hanno compreso meglio e con cui hanno acquisito maggiore familiarità.

Indice

Capitolo 1

Storia del Calcolo Integrale

Il concetto di integrale nasce da due problemi apparentemente molto diversi tra loro.
Il primo riguarda il calcolo delle aree racchiuse da curve piane, il cosiddetto problema delle quadrature. Il secondo riguarda l'operazione inversa della derivazione, ovvero quell'operazione che, data una funzione, ne trova un'altra detta primitiva, la cui derivata è la funzione di partenza. La risposta al primo problema è quello che oggi chiamiamo integrale definito, chiamiamo invece integrale indefinito quell'operazione che data la derivata, ci consente di trovare la sua primitiva. Il teorema fondamentale del calcolo integrale, che affronteremo nel capitolo successivo, ci consente di legare l'area sottesa ad un grafico all'incremento della primitiva tra due estremi di integrazione.

In questo capitolo ci occuperemo di presentare le tappe fondamentali della storia del calcolo integrale, che si sviluppa soprattutto durante il 1800 con Bernhard Riemann, ma alcune idee e metodi derivano da matematici vissuti circa duemila anni prima come Eudosso di Cnido ed Archimede, per poi passare da Leibniz e Newton che hanno avuto un ruolo fondamentale nello sviluppo della teoria dell'integrazione.

1.1 Il periodo greco

Nella storia della matematica i Greci hanno avuto un ruolo molto rilevante, si può dire indispensabile. Infatti la loro civiltà e la loro cultura sono state le più influenti nello sviluppo del nostro sapere occidentale moderno e quelle decisive per la fondazione della matematica come la intendiamo oggi. Quando si parla di Grecia si intende tutto il bacino del Mar Egeo e Ionio, che comprende le coste dell'Asia Minore, quelle della Sicilia e dell'Italia Meridionale. Tra i centri di cultura più importanti per lo sviluppo di questa civiltà bisogna ricordare le città di Mileto ed Efeso, le isole Samo e Chio: qui la cultura e la società greca sono state fortemente influenzate da quella babilonese ed egizia.
Nonostante la civiltà greca antica sia durata fino al 600 d.C., dal punto di vista della storia della matematica distinguiamo due periodi: quello classico (o arcaico), dal 600 al 300 a.C., e quello alessandrino o ellenistico, dal 300 a.C. al 600 d.C. circa.
La matematica del periodo arcaico risulta essere molto più moderna di quella delle civiltà precedenti, principalmente perché superava il ragionamento empirico dando largo spazio a un ragionamento di tipo deduttivo. Ci si occupava principalmente di geometria con l'uso di due strumenti: la riga e il compasso.

Il primo nome che si ricorda di questo periodo è Talete di Mileto (624 - 546 a.C.), considerato il primo dei Sette Sapienti, viene rappresentato dalla tradizione come uno scienziato distaccato dalla vita quotidiana e anche come un abile politico e uomo pratico. Fondò una delle prime scuole, quella ionica, e aveva come allievi Anassimadro, Anassimene e Anassagora.
Un altro grande matematico e filosofo di questo periodo fu Pitagora di Samo (570 - 495 a.C.). A lui e alla scuola Pitagorica, da lui fondata, si devono importati risultati soprattutto in geometria, oltre al noto teorema che porta il suo nome.
Nel periodo ellenistico, dal 300 a.C. al 600 d.C., in seguito alla conquista macedone, si formò un nuovo ambiente che favorì in particolar modo lo svi-

luppo delle scienze. Nacquero nuovi centri ad Alessandria, Pergamo e Rodi. In particolare ad Alessandria vennero fondate la *Biblioteca*, che raccoglieva tutto il sapere dell'epoca attraverso testi scritti sul papiro, e il *Museo*, luogo d'incontro tra dotti e anche di insegnamento, annesso alla biblioteca. È in questo periodo che la scienza diventa una vera e propria disciplina particolare.
Un esempio è dato dalla geometria: diventa infatti una scienza razionale che studia le proprietà delle figure del piano e dello spazio, di curve diverse dalla circonferenza e dalla linea retta, e superfici diverse dalla sfera e dal piano.
I due nomi più importanti di questo periodo sono Euclide e Archimede.

Gli *Elementi* sono l'opera più importante di Euclide, in cui raccolse tutti i teoremi fondamentali dell'aritmetica e della geometria. Si tratta del primo esempio di trattato scientifico, per il metodo rigorosamente deduttivo che fa discendere ogni proposizione da proposizioni precedentemente stabilite, a partire da cinque assiomi fondamentali che riguardano la geometria.
Il primo vero precursore del calcolo integrale è però Archimede (287-212 a.C.). Si è infatti occupato del volume della sfera e del cilindro, del problema della quadratura del cerchio e della parabola, oltre a porsi il problema di determinare il baricentro di queste figure.
Ad Archimede si deve anche l'uso sistematico del metodo di esaustione, già introdotto da Eudosso di Cnido (408 - 355 a.C.).

Nonostante la grandezza di questa civiltà in questo periodo, alcune tappe fondamentali come la morte di Alessandro Magno e la distruzione di Alessandria, portano al termine lo sviluppo della storia greca.
Con l'avvento dell'Impero Romano inizia un periodo sterile per lo sviluppo scientifico. Attraverso l'opera di alcuni saggi del VI secolo d.C., quello che resta della scienza antica viene raccolto dalla Chiesa e chiuso nei monasteri, dove potrà sopravvivere ai secoli che seguiranno.

1.1.1 Il metodo di esaustione

Il metodo di esaustione nasce dalle dimostrazioni fornite da Eudosso riguardo le proposizioni sui volumi di piramidi e coni affermate, ma non dimostrate da Democrito.
Il metodo aveva come idea di base la possibilità di inscrivere e circoscrivere figure rettilinee attorno ad una figura curva e di continuare a moltiplicare il numero dei lati del poligono in modo indefinito fino ad approssimare nel miglior modo possibile la linea curva.
Il principio su cui si basa questo metodo viene definito *lemma* o *postulato di Archimede*, anche se lo stesso matematico siracusano lo attribuì proprio ad Eudosso e non è anche improbabile che sia stato formulato ancora prima da Ippocrate di Chio, il quale afferma che:

> *Date due grandezze aventi un certo rapporto (cioè nessuna delle quali sia zero) è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra grandezza.*

Da questo Eudosso ricavò la proposizione che costituisce la base del metodo di esaustione:

> *Se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.*

Il fatto che continuando la procedura indicata nell'assioma di Archimede, si possa ottenere una grandezza piccola a piacere, portò a chiamare il procedimento di Eudosso (ma solo molto più tardi) con il termine "metodo di esaustione", anche se "esaustione" venne introdotto nel XVII secolo.
I matematici greci non hanno mai considerato il processo descritto come una sequenza infinita di passaggi. Nella teoria greca c'era sempre una quantità (che poteva essere resa piccola a piacere) lasciata oltre una certa soglia, in modo da consentire una comprensione intuitivamente chiara del procedimento

adottato. Il risultato venne dimostrato quindi solo indirettamente, provando - caso per caso con ragionamenti diversi - che dalla negazione di essi sarebbe seguito un assurdo.
Con questo teorema si riuscì a stabilire un metodo che permetteva quindi di calcolare la misura dell'area di figure curvilinee con un'approssimazione sempre migliore.

Il metodo di esaustione si applica procedendo per assurdo. Infatti, per dimostrare che un'area o un volume A è uguale a B, si suppone che $A < B$ e si considera un $\varepsilon > 0$ tale che $B - A = \varepsilon$.
Se si riescono a costruire delle figure geometriche di area o volume $A_n < A$ (che sono quindi contenute in A) tali che $B - A_n < \varepsilon$, allora si avrà che

$$A > A_n > B - \varepsilon = A, \text{ cioè una contraddizione.}$$

In modo analogo si procede supponendo $A > B$.
Il metodo di esaustione rappresenta quindi una tipologia di dimostrazione che non è però mai stata formulata in modo preciso e sintetico dai matematici greci, infatti essi non formularono mai il principio del metodo come una proposizione generale a cui ci si sarebbe potuti riferire.

1.1.2 Archimede da Siracusa

Archimede è considerato uno dei più grandi scienziati dell'antichità. Le traduzioni italiane delle sue opere sono a cura di Attilio Frajese, considerato uno dei massimi esperti italiani di storia matematica dell'antica Grecia, che ha tradotto le opere di Archimede con la stessa precisione con cui ha tradotto Euclide.
Archimede nacque a Siracusa nel 287 a.C., la città di Siracusa era diventata in quegli anni una grande potenza militare. I siracusani avevano infatti sconfitto gli ateniesi, sotto la guida di Alcibiade, in una spedizione indetta proprio da quest'ultimi. Gli ateniesi, appena sconfitti, diventarono dei veri e propri schiavi del popolo di Siracusa; venivano infatti fatti lavorare nelle miniere

in condizioni disumane. Morirono molti ateniesi e questa vicenda segnò una tappa importante nel declino della potenza di Atene.
A Siracusa poi iniziò un periodo in cui si alternarono molti dittatori; in particolare Gerone II, uomo politico di grande influenza, comandò Siracusa in un momento molto delicato perché trovandosi al centro del Mediterraneo era contesa tra Greci e Carteginesi, ma soprattutto Roma stava avendo in quel periodo una grande espansione. Ci fù uno scontro tra Roma e Siracusa, in cui i siracusani vennero sconfitti e Archimede venne ucciso da un soldato romano. Archimede passò molto tempo ad Alessandria D'Egitto, dove compì i suoi studi, probabilmente presso la scuola euclidea. Scrisse tanti libri molti dei quali sono stati persi, alcuni sono scritti in greco, altri ci sono arrivati dagli arabi.

- Uno dei suoi lavori più incredibili è *Sull'equilibrio dei piani ovvero: sui centri di gravità dei piani* in cui dimostrò il principio della leva. È famoso il racconto in cui Archimede fece legare, attraverso un sistema di pulegge, una nave pesantissima in costruzione all'arsenale di Siracusa e tirando un capo di una corda riuscì a sollevare la nave per essere messa in acqua.

- *Sui corpi galleggianti* è un'opera divisa in due libri, nel primo dei quali viene enunciato il Principio di Archimede: *ogni corpo immerso, parzialmente o completamente in un fluido (liquido o gas), riceve una spinta verticale dal basso verso l'alto, uguale per intensità al peso del volume del fluido spostato*; il secondo tratta l'equilibrio dei paraboloidi immersi in fluido (studia cioè l'equilibrio delle navi sull'acqua).

- Ne *Il metodo*, si rivolse ad Eratostene (allora direttore della biblioteca di Alessandria) spiegandogli il suo metodo di lavoro. Infatti una volta che aveva individuato il risultato, usava il metodo di esaustione per dimostrarlo, anche se questo metodo non permetteva di individuare i risultati, ma solo di verificarne l'esattezza successivamente alla loro scoperta. Viene citato come esempio il calcolo dell'area del segmento parabolico che tratteremo nel prossimo paragrafo.

- Ne *La misura del cerchio* Archimede dimostrò che un cerchio equivale a un triangolo con base di lunghezza uguale a quella della circonferenza e altezza uguale alla lunghezza del raggio. Questo risultato è stato ottenuto attraverso il metodo di esaustione, approssimando il cerchio tra due successioni, quella delle aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti ad esso.
  Nello stesso modo, Archimede approssimò il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro. Partendo da un triangolo equilatero, e raddoppiando ad ogni passo il numero dei lati dei poligoni regolari inscritti e circoscritti, arrivando fino a poligoni regolari di 96 lati, trovò che la misura dell'area del cerchio di raggio r era compresa tra
  $$\left(3+\frac{10}{71}\right)r^2 \quad e \quad \left(3+\frac{10}{70}\right)r^2$$
  ovvero il risultato è molto simile a quello che otterremmo oggi calcolando l'area del cerchio con il valore approssimato di $\pi \approx 3,14$[1].

- *Sulla sfera e il cilindro* Archimede presentò il risultato che il volume della sfera è quattro volte il volume del cono che ha base uguale al cerchio massimo della sfera e altezza uguale al raggio.

- Ne *Sulle spirali*, una delle sue opere più importanti, Archimede calcolò l'area del primo giro di spirale. Il metodo da lui utilizzato sarà un'anticipazione del metodo di integrazione Riemann.

[1] Il numero che Archimede cercava era naturalmente π numero irrazionale trascendente. π viene indicato con la lettera greca per la prima volta dal matematico William Jones ed è diventato di uso comune con Eulero nel $XVII$ secolo. La sua trascendenza viene dimostrata solo nel 1882 da Ferdinand Lindemann e solo negli ultimi tempi, grazie all'uso di potenti calcolatori, è stato possibile approssimare il suo valore fino alla milionesima cifra e forse molto di più.

- Un analisi di come determinare l'area di un segmento parabolico venne fatta da Archimede nel *Metodo*, ma in un altro trattato, la *Quadratura della parabola*, egli presentò tutte le dimostrazioni formali mediante il metodo di esaustione.

Con i notevoli risultati che riuscì ad ottenere, Archimede viene considerato il precursore del calcolo integrale. Anche se non fece mai ricorso al concetto di limite, nel *metodo* si trovano molte considerazioni infinitesimali che probabilmente hanno dato il contributo decisivo per lo sviluppo delle idee di derivata ed integrale, anche se questi concetti non facevano parte della geometria greca.
Dopo Archimede i matematici greci si interessarono di più alle applicazioni geometriche che alla ricerca di nuove teorie. Ipparco, Erone, Tolomeo, i suoi successori, si concentrarono maggiormente nello studio di scienze come l'astronomia, l'ottica e la meccanica.

1.1.3 L'area del segmento parabolico

Si vuole determinare l'area di un segmento parabolico delimitato dal segmento AB (Figura 1.1).

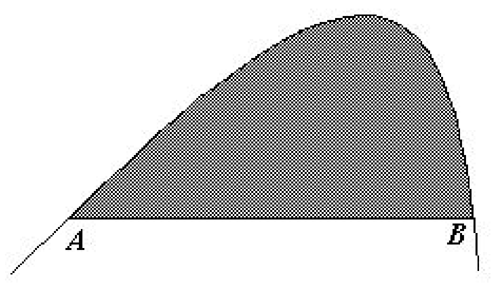


Figura 1.1: *Segmento parabolico*

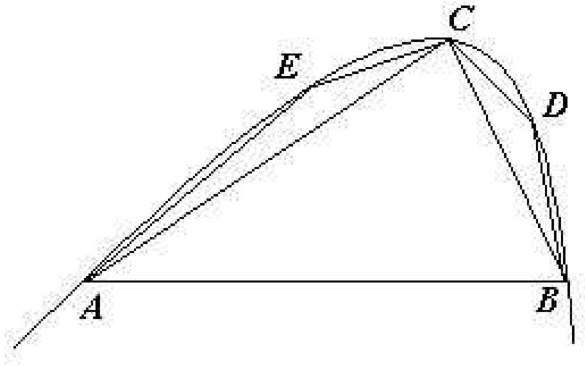


Figura 1.2: *Triangoli inscritti in un segmento parabolico*

Si costruisce il triangolo ABC inscritto nel segmento parabolico, avente lo stesso vertice C e la stessa base AB del segmento parabolico. Poi, allo stesso modo, si costruiscono i triangoli AEC e CDB inscritti in ciascuno dei due segmenti parabolici più piccoli aventi come basi i lati AC e CB (Figura 1.2).
Richiamiamo alcuni lemmi utili per il calcolo dell'area del segmento parabolico (le dimostrazioni - che non sono riportate - derivano dalle proprietà geometriche della parabola).

Lemma 1.1.1. *L'area di un triangolo inscritto in un segmento parabolico è maggiore della metà dell'area di quest'ultimo.*

Lemma 1.1.2. *La somma delle aree dei triangoli AEC e CDB è un quarto dell'area del triangolo ABC.*

Chiamiamo A l'area del segmento parabolico che stiamo cercando (ovvero quella della Figura 1.1), con A_0 l'area del triangolo ABC, A_1 la somma delle aree dei triangoli AEC e CDB, con A_2 la somma delle aree dei triangoli costruiti sui lati AE, EC, CD, DB, e così per A_3, A_4, ... A_n. Abbiamo che

$$A_1 = \frac{1}{4}A_0; \quad A_2 = \frac{1}{4}A_1; \quad \dots \quad A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n.$$

Lemma 1.1.3. *Data una successione di grandezze* $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ *ognuna quadrupla della successiva, allora si ha:*

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n + \frac{A_n}{3} = \frac{4}{3}A_0.$$

Teorema 1.1.4. *L'area* A *del segmento parabolico è i* $\frac{4}{3}$ *di* A_0*, area del triangolo* ABC*.*

Ovviamente, la teoria attuale consente di calcolare immediatamente la somma della serie, ma Archimede provò, attraverso il metodo di esaustione, che l'area del segmento parabolico non poteva essere né più grande né più piccola di $\frac{4}{3}\ A_0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che sia $A > \frac{4}{3}\ A_0$. Poniamo
$E = A - \frac{4}{3}\ A_0$ ed $E_n = A - (A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n)$. Si ha per ogni $n > 0$
$A = \frac{4}{3}A_0 + E = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n + E_n$.
Per il lemma 1.1.2, ad ogni passo l'area di E_n si riduce di più della metà, quindi per n abbastanza grande si avrà che $E_n < E$, e ciò implica che
$\frac{4}{3}\ A_0 < A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n$, che è assurdo per il lemma 1.1.3.
In modo analogo si dimostra che è assurdo supporre $A < \frac{4}{3}\ A_0$. □

1.2 Il XVII secolo

Al ricco periodo ellenistico, seguì il lungo periodo del Medioevo (dalla caduta di Roma 476 d.C. alla caduta di Costantinopoli nel 1453 d.C.) durante il quale non ci furono numerosi sviluppi per la matematica.
Molto importante in questo periodo fu l'influenza degli Arabi in Europa, che contribuirono in modo determinante nello sviluppo dell'algebra. Infatti nella scuola di Bagdad tra il VII e l'VIII secolo vennero tradotte in arabo numerose opere di autori greci come Euclide, Archimede, Apollonio, Erone, Tolomeo, Diofanto (nonchè opere indiane e persiane), le cui traduzioni dall'arabo iniziarono poi a circolare in Europa.

Il sistema di numerazione decimale e lo zero vennero introdotti in Europa con il *Liber Abaci* di Leonardo Pisano, detto Fibonacci (1175 - 1235 ca.), forse uno dei più grandi matematici di questo periodo. Furono di grande importanza anche i matematici persiani che nel XII secolo trovarono metodi per generalizzare l'estrazione di radici quadrate, cubiche e anche radici di indici superiori; risolsero alcuni problemi di ottica tramite la teoria delle coniche; iniziarono a sviluppare la trigonometria sferica e piana.

Nel tardo medioevo, Nicole Oresme (1323 - 1382) iniziò ad occuparsi di grafici delle funzioni e del concetto di infinito, anche se una delle scoperte più importanti di questo periodo in occidente fu quella pubblicata da Cardano (1501 - 1576) nel suo trattato *Ars Magna* (1545) in cui presentò una formula algebrica per la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado.
Ma solo nel XVII secolo si avranno degli importanti sviluppi per quanto riguarda il calcolo differenziale ed integrale. Questi importanti sviluppi avvengono grazie ai contributi di Keplero e di Bonaventura Cavalieri, allievo di Galielo Galilei.

Giovanni Keplero (1571 - 1630), noto soprattutto per le leggi che regolano il moto dei pianeti, fu un astronomo e matematico di questo periodo. Il suo trattato *Nova stereometria*, pubblicato nel 1615, nasce dal problema di determinare le proporzioni migliori per una botte da vino.
Keplero si pose il problema di determinare l'area del cerchio, abbandonando le procedure di Archimede. Considerò infatti il cerchio come un poligono regolare composto da un numero infinito di lati, in modo che la sua area potesse essere considerata composta da triangoli infinitesimi che hanno come basi i lati del poligono e come vertici il centro del cerchio. Trovò quindi, che la totalità di questi era data dalla metà del prodotto del perimetro e del raggio (l'apotema). Keplero applicò questo metodo a numerosi problemi: ad esempio, considerando la sfera come un numero infinito di coni infinitesimi, dimostrò che il volume era dato da un terzo del prodotto del raggio per l'area della superficie. Estese il suo metodo anche a cono e cilindro e anche

a solidi non trattati dagli antichi, ad esempio quelli generati dalla rotazione di circonferenze, parabole, ellissi, iperboli. Si ritiene che Keplero sia giunto a conclusioni fondamentali per gli sviluppi successivi del calcolo integrale, anche se il suo metodo e linguaggio non era privo di errori.

1.2.1 Il principio di Cavalieri

Francesco Cavalieri (1598 - 1647) è stato un matematico italiano che ha preso il nome di Bonaventura Cavalieri quando entrò nell'ordine dei Gesuati a soli quindici anni. Studiò matematica all'università di Pisa dove fu allievo di Benedetto Castelli e dove incontrò Galileo Galilei, con cui intrattenne per tanti anni una fitta corrispondenza epistolare per confrontarsi sui suoi studi geometrici.

L'opera più famosa di Cavalieri fu la *Geometria indivisibilibus* pubblicata nel 1635, ritenuta da molti una svolta fondamentale per l'analisi. Sicuramente Cavalieri fu influenzato da Galileo, dalla conoscenza delle teorie di Valerio e di Stevino[2] anche se non portò avanti l'idea di limite che questi avevano anticipato, ma tramite la nozione di indivisibile costruì un metodo geometrico di dimostrazione per cui divenne molto famoso.
In nessuna delle sue pubblicazioni Cavalieri descrisse in modo rigoroso e preciso che cosa intendesse per *indivisibile*, termine da lui utilizzato per indicare elementi infinitesimi utilizzati nel suo metodo. Considerò un numero indefinito di rette parallele equidistanti come gli indivisibili delle superfici e un numero indefinito di piani paralleli equidistanti come gli indivisibili dei volumi. Anche Galileo aveva più o meno la stessa idea di indivisibile, anche se l'aveva maggiormente utilizzata in ambito fisico. Cavalieri concentrò il suo studio soprattutto sulla relazione tra gli indivisibili di due diverse configurazioni e non sul numero di indivisibili di una data area o volume.

[2] Luca Valerio (1553 - 1618) matematico italiano, definito da Galileo *il nuovo Archimede*. Simon Stevin (1548 - 1620) matematico fiammingo.

Il metodo degli indivisibili può essere enunciato nel seguente **principio di Cavalieri**:

> *se due solidi hanno altezze uguali e le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da questa stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo stesso rapporto.*

Cavalieri aveva enunciato in termini geometrici quello che può essere considerato uno dei primi teoremi generali del calcolo, per tutti i valori interi positivi di n

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \ .$$

Consideriamo il caso $n = 1$.

Proposizione 1.2.1. *Se un parallelogramma è diviso dalla sua diagonale in due triangoli, allora il parallelogramma è il doppio di ciascun triangolo.*

Dimostrazione. Dato un parallelogramma $AFCD$, se tracciamo la sua diagonale CF, esso viene diviso in due triangoli ACF e CDF, dimostriamo che il parallelogramma è il doppio di uno di questi due triangoli (Figura 1.3).

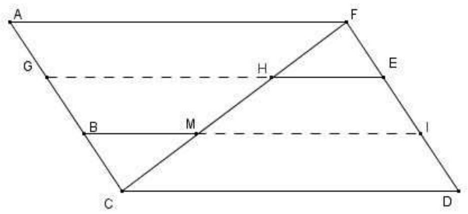


Figura 1.3: *parallelogramma tagliato dalla diagonale*

Si considerino i segmenti congruenti $EF = CB$, dai punti E e B si traccino EH e BM paralleli a CD.
Consideriamo i triangoli BCM e FEH, essi hanno:

- i lati $FE = BC$ per costruzione;
- gli angoli $B\widehat{C}M = E\widehat{F}H$ perchè angoli alterni interni delle parallele FD e CA tagliate dalla trasversale CF;
- $F\widehat{E}H = M\widehat{B}C$ poiché: $M\widehat{B}C$ corrispondente di $F\widehat{A}C$ (rispetto alle due parallele AF e BM tagliate dalla trasversale CA), $C\widehat{A}F$ congruente a $F\widehat{D}C$ poichè angoli opposti in un parallelogramma e infine $F\widehat{D}C = F\widehat{E}H$ perchè angoli corrispondenti delle parallele HE e CD tagliate dalla trasversale FD. Per la proprietà transitiva si ha che $F\widehat{E}H = M\widehat{B}C$.

Per il secondo criterio di congruenza dei triangoli si ha quindi che i due triangoli sono congruenti e in particolare $BM = HE$. Nello stesso modo si può dimostrare che $GH = MI$. Procedendo in questo modo, tutte le linee (ovvero gli indivisibili) del triangolo ACF saranno uguali a quelle del triangolo FDC, quindi $ACF = FDC$ e il parallelogramma sarà il doppio di uno dei due triangoli. □

Il parallelogramma è quindi la somma degli indivisibili contenuti nei due triangoli, è chiaro che la somma delle prime potenze dei segmenti contenuti in uno dei due triangoli componenti è uguale alla metà della somma delle prime potenze dei segmenti contenuti nel parallelogramma:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$$

Cavalieri riuscì, con un ragionamento simile, a dimostrare che la somma dei quadrati dei lati di un parallelogramma è uguale a un terzo della somma dei quadrati dei segmenti contenuti nel parallelogramma. Da questo risultato, dimostrò anche che il volume del cono è $1/3$ di quello del cilindro circoscritto e che l'area del segmento parabolico è 2/3 dell'area del rettangolo circoscritto.

Contributi molto importanti alla teoria degli indivisibili furono dati da **Torricelli** (1608 - 1647), ricordato in particolar modo però, per i suoi contributi all'analisi. Infatti intuì il legame esistente tra i processi di derivazione e di integrazione. Infatti, Torricelli attraverso considerazioni cinematiche, e **Barrow** attraverso considerazioni geometriche, introdussero il concetto di integrale indefinito e la relazione tra il problema delle tangenti e quello del calcolo di aree e volumi (problemi che prima di allora erano sempre stati considerati come separati).

Il legame tra l'operazione di derivazione e quella di integrazione prende proprio il nome di *teorema fondamentale del calcolo integrale* o *teorema di Torricelli - Barrow*; ma soltanto con le regole di calcolo di Leibniz e Newton queste nuove teorie assumeranno un significato completo.

1.2.2 Newton e Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716) e Isaac Newton (1642 - 1727) sono considerati i fondatori del calcolo differenziale ed integrale. Anche se esistono numerose discussioni su chi dei due sia davvero stato il padre fondatore del calcolo, i contributi di entrambi hanno portato allo sviluppo dell'analisi come la conosciamo oggi.

Entrambi furono debitori ai loro predecessori, infatti i loro risultati e le loro formulazioni, sono il risultato di un background culturale comune da cui derivano. Negli anni precedenti ai due matematici, il problema della tangente aveva ottenuto una grande importanza in campo matematico. Infatti, numerosi metodi per trovare la tangente a una curva, furono proposti: Roberval aveva generalizzato un metodo che Archimede aveva usato per trovare la tangente in ciascun punto della spirale, Fermat ne parlò nel suo trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, Cartesio presentò un metodo puramente algebrico, applicabile solo a curve la cui equazione poteva essere espressa da un polinomio. Dopo Fermat il problema della tangente rimase un problema aperto; acquistò sempre più importanza poiché in quegli anni lo sviluppo della fisica e della meccanica richiedevano uno studio sempre più approfondito delle curve.

Isaac Newton fu uno studente a Cambridge di Isaac Barrow. Barrow conosceva il metodo degli indivisibili di Cavalieri e considerava la tangente a una curva come il prolungamento degli elementi infiniti lineari dai quali era composta e anche come la direzione del movimento di un punto che aveva generato la curva stessa con il suo moto. Sicuramente Newton subì forti influenze da Barrow.

L'idea di calcolo infinitesimale fu trattata in un primo momento nella pubblicazione *Philosophiae naturalis principia mathematica* nel 1687, ma solo nel 1671 (rimasto inedito fino al 1736) con il *Methodus fluxionum et serieum infinitarum* presentò la sua teoria sulle flussioni. Newton considerò le quantità variabili non come aggregati di parti infinitamente piccole, ma come generate da un moto continuo: ovvero le linee come il risultato del moto continuo di un punto, le superfici come generate dal moto continuo di una linea, ecc.. Quindi, secondo Newton, le quantità matematiche andavano considerate come un moto continuo e non come composte da momenti o parti molto piccole.

Newton definì con il termine *flussione* la velocità con la quale le grandezze venivano generate (indicandole con una lettera con un punto sopra) e con *fluente* la quantità generata. Ad esempio, se x e y sono fluenti allora $\dot{x}$ e $\dot{y}$ saranno le loro flussioni. Osservò che, se si consideravano intervalli di tempo uguali e piccoli a piacere, le flussioni diventavano proporzionali agli accrescimenti delle corrispondenti fluenti.

Nel 1676 venne a conoscenza del fatto che Leibniz stava lavorando su problemi simili, allora inviò una lettera al filosofo, datata 24 Ottobre 1676, in cui esponeva il problema fondamentale del suo calcolo:

> *dati, in un'equazione, i fluenti di qualsiasi numero di quantità, trovare le flussioni e viceversa.*

Questo è quello che corrisponde al nostro calcolo differenziale.
Newton aveva introdotto il problema della determinazione di una funzione

F tale che $F' = f$, con f funzione assegnata, ovvero aveva posto il problema del calcolo dell'operazione inversa alla derivazione. Un altro elemento molto importante che contribuì a rendere efficace il metodo delle flussioni furono i risultati di Newton sulle serie infinite e la scoperta dello sviluppo di un binomio.

Gottfried Wilhelm von Leibniz è stato insieme a Newton il padre fondatore del calcolo infinitesimale. Appassionato soprattutto di logica e diritto, durante un viaggio a Parigi nel 1672 aveva incontrato Huygens e dopo questo incontro iniziò ad approfondire i suoi studi in matematica. Durante un altro viaggio a Londra, nel 1673, aveva incontrato molti matematici di cui iniziò a studiare le opere, probabilmente venne anche a conoscenza, attraverso Collins, della teoria di Newton sulle flussioni.
Leibniz si occupò di due grandi problemi: il problema delle quadrature (ovvero del calcolo delle aree racchiuse tra l'asse delle ascisse e da una qualsiasi funzione $y = f(x)$) e il problema delle tangenti. Per quanto riguarda il problema delle aree, Leibniz immaginò di poter suddividere l'area sottesa da una curva $y = f(x)$ in tanti rettangoli, poi sommare l'area di questi. Naturalmente un numero maggiore di rettangoli porta a una maggiore precisione nel calcolo dell'area. Per ottenere l'area esatta, Leibniz ipotizzò di dover suddividere la figura in infiniti rettangoli e calcolare la somma delle aree infinitesime. Da qui nasce il simbolo $\int x$, e più tardi $\int x \, dx$, per indicare la somma di tutte le x, dove il simbolo dell'integrale rappresenta una **S** allungata che sta per *somma*.

L'idea di Leibniz per trovare l'equazione della retta tangente ad una curva in un punto fu quella di pensare alla tangente come la retta che passa per due punti, diciamo P e P' *infinitamente vicini*, o meglio, che la distanza tra P e P' sia *infinitesima*. Quindi dalla funzione y si ricava una funzione $\dfrac{dx}{dy}$ dove d indica il *differenziale* ovvero l'*incremento infinitesimo* delle variabili. Questa funzione esprime il coefficiente angolare della retta tangente nel punto x della funzione.

Questo nuovo metodo presentato da Leibniz era molto più vantaggioso rispetto alle *flussioni* di Newton, a questo ha contribuito fortemente l'uso dei simboli a cui Leibniz diede grande importanza. Il metodo di Newton era ottimo per descrivere i fenomeni fisici e per le tecniche straordinarie di calcolo che presentava, ma risultava inferiore rispetto al grande formalismo presentato da Leibniz, tuttora in uso, praticamente invariato.

Leibniz intrattenne una fitta corrispondenza con i fratelli Bernoulli che perfezionarono il calcolo e il simbolismo da lui introdotto. Poi con Eulero venne introdotto il calcolo delle variazioni, il calcolo differenziale alle curve e alle superfici. Per tutto il Settecento poi, lo studio delle funzioni divenne la principale attività dei matematici.

1.3 Il XIX secolo e gli sviluppi più recenti del calcolo integrale

Dopo gli studi sul legame tra derivata e integrale di grandi matematici come Bernoulli, Eulero, D'Alembert, Lagrange che occuparono tutto il XVIII secolo, cresceva sempre più l'esigenza di una risistemazione critica del calcolo integrale. Questa fase della storia del calcolo inizia con **Cauchy** (1789 - 1857) che nel *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821) diede una definizione di integrale che non dipende dalla sua derivata. Per definire l'integrale di una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ considerò la partizione dell'intervallo $[a, b]$ come $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ e poi definì la somma *alla Cauchy* come

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Cauchy dimostrò che, prendendo una partizione sempre più piccola, il valore della somma S avrebbe raggiunto un certo limite che è quello che si chiama **integrale definito** che dipende solo dalla funzione $f(x)$ e dagli estremi dell'intervallo $[a, b]$.

Cauchy si pose il problema di come determinare l'integrale di funzioni non continue, perché guardando al suo risultato, se una funzione non era continua, risultava difficile calcolarne la primitiva. Introdusse allora l'idea di **integrale improprio** (con significato diverso da quello attuale) per calcolare la primitiva di funzioni che avevano un punto di discontinuità, per poi estendere la nozione a funzioni con un numero finito di punti di discontinuità.

1.3.1 Bernhard Riemann

Bernhard Riemann (1826 - 1866) nacque in Germania, era figlio di un pastore protestante. Studiò ad Hannover, per poi trasferirsi all'università di Göttingen e poi Berlino. A Berlino incontrò alcuni dei più grandi matematici di quel periodo come Dirichlet e Jacobi. Tornò poi a Göttingen dove lavorò, con l'aiuto di Gauss, alla sua prima tesi che pubblicò nel 1851.
È nella seconda tesi del 1854, necessaria per essere abilitati all'insegnamento all'Università di Göttingen, dal titolo *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria)* che troviamo la definizione di integrale e i primi risultati fondamentali della teoria di Riemann. Nel 1859, Riemann ottenne la cattedra all'Università di Göttingen (succedendo a Dirichlet), ma successivamente le sue condizioni di salute si aggravarono, essendo malato di tubercolosi. Morì durante un viaggio in Italia nel 1866.
È solo dopo la sua morte, che la tesi del 1854 venne pubblicata e incominciò ad essere divulgata e studiata dati i fondamentali contenuti riguardo la teoria dell'integrazione.

La definizione di integrale secondo Riemann è più generele di quella data da Cauchy, poiché non si limitava a considerare solo funzioni continue o con un numero finito di punti di discontinuità.

L'integrale di Riemann

Definizione 1.1. Data una funzione f limitata nell'intervallo $[a, b]$ si consideri una partizione $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a, b]$ e la somma
$S = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ dove ξ_i è un punto arbitrario di $[x_i, x_{i+1}]$.
Per Riemann, una funzione (limitata) è integrabile su $[a, b]$ quando S ammette limite finito per $n \longrightarrow +\infty$ per ogni partizione dell'intervallo $[a, b]$ e per ogni scelta dei punti ξ_i.

Questo limite, quando esiste finito, corrisponde al valore dell'*integrale definito* su $[a, b]$, ovvero $\int_a^b f(x)\, dx$.

La definizione di integrale secondo Riemann che si insegna solitamente nei corsi di analisi, che riporteremo di seguito, deriva dal matematico francese Darboux. Infatti era impegnato nell'insegnamento delle idee di Riemann e per riuscire nell'intento aveva tradotto nel 1873 in francese tutti i suoi lavori.

Definizione 1.2. Dato un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato. Si chiama partizione di $[a, b]$ un sottoinsieme finito $P = x_0, x_1, ..., x_n$ di punti di $[a, b]$ tale che $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Indichiamo con $\mathbb{P}[a, b]$ l'insieme (infinito) di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$.

Definizione 1.3. Sia data una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con f limitata.
Ad ogni partizione $P = x_0, x_1, ..., x_n$ di $[a, b]$ possiamo associare la **somma inferiore** $s(P)$ definita come:

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad dove \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},\ x_i]} f(x)$$

e la **somma superiore**:

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad dove \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},\ x_i]} f(x).$$

Definizione 1.4. Sia $P \in \mathbb{P}[a,b]$, si definisce *integrale inferiore* di f in $[a,b]$ la quantità

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P \in \mathbb{P}[a,b]} s(P)$$

e analogamente si definisce *integrale superiore* di f in $[a,b]$ la quantità

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P \in \mathbb{P}[a,b]} S(P).$$

Da qui si ha la definizione di funzione integrabile secondo Riemann:

Definizione 1.5. Una funzione f si dice **integrabile secondo Riemann** se l'integrale inferiore e superiore di f coincidono, cioè se vale:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

e indicheremo il loro valore comune con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che viene spesso chiamato *integrale definito.*

La nuova definizione di Riemann coinvolge funzioni qualsiasi (limitate) e quindi non è detto che il loro integrale definito esista sempre.

Esempio 1.3.1. *La funzione di Dirichelet* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann. Infatti per le proprietà dei reali e razionali, si può provare che per ogni partizione P *di* $[0,1]$ *si ha che*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

poiché si ha che $s(P) = 0$ *e* $S(P) = 1$.

La novità nella teoria di Riemann consiste nell'aver introdotto una condizione necessaria e sufficiente per stabilire quando la condizione di integrabilità è soddisfatta:

Teorema 1.3.1. *Data una funzione limitata* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* f *sia integrabile secondo Riemann è che* $\forall \varepsilon > 0$ *esista una partizione* $P \in \mathbb{P}[a, b]$ *tale che*

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Vi sono condizioni sufficienti (ma non necessarie) per l'integrabilità secondo Riemann di una funzione, la cui verifica è più semplice di quella del Teorema 1.3.1 o della definizione stessa:

Teorema 1.3.2. *La funzione* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *è integrabile secondo Riemann se vale una delle seguenti condizioni:*

1. *f è continua in [a,b];*
2. *f è monotona in [a,b];*
3. *f è limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità in [a,b].*

Nonostante la teoria di Riemann fosse innovativa, fu soggetta ad alcune obiezioni: i teoremi del passaggio al limite richiedevano ipotesi molto restrittive e molte funzioni non erano integrabili. Nel 1907 Giuseppe Vitali e Henri Lebesgue, indipendentemente l'uno dall'altro, svilupparono una teoria che permise di caratterizzare le funzioni integrabili secondo Riemann in termini della misura di Lebesgue, quindi per una classe di funzioni più ampia. Si generalizzò la teoria di Riemann, in particolare il teorema di Lebesgue - Vitali semplifica molto il Teorema 1.3.2:

Teorema 1.3.3. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Si ha che* f *è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.*

1.3.2 Henri Lebesgue

Henri Lebesgue, nato nel 1878, fu uno dei matematici più importanti del Novecento. Studiò all'*Ecole Normale Supérieure* di Parigi dove, nel 1897, ottenne il diploma di insegnante di Matematica; poi negli anni successivi insegnò al *Lycée Centrale* di Nancy dal 1899 al 1902. In questi anni, Lebesgue iniziò a formulare la sua teoria della misura, e nel 1901 all'interno di un saggio *Sur une generalizzazione de l'intégrale définie* diede la definizione di integrale di Lebesgue.

Nel 1903 a Parigi discusse la tesi di laurea *Intégrale, longueur, aire* (*Integrale, lunghezza, area*), pubblicata poi negli Annali di matematica; nel primo capitolo veniva presentata la teoria della misura e nel secondo veniva definito l'integrale dal punto di vista geometrico e analitico. Nel trattato *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* vennero raccolte le sue lezioni dal 1902 al 1903 dove il problema dell'integrazione era inquadrato rispetto al suo contesto storico. Nel 1903 pubblicò *Sur les séries trigonométriques* in cui presentava alcuni risultati riguardo le serie di Fourier. Nel 1910 in un articolo dal titolo *Representation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz*, Lebesgue si occupò delle serie di Fourier di funzioni che soddisfano la condizione di Lipschitz.

Venne nominato professore associato alla Sorbona nel 1910 e nel 1921 diventò professore al Collège de France. Morì a Parigi nel 1941.

L'integrale di Lebesgue

La teoria dell'integrale di Lebesgue si basa sulla teoria della misura formulata da Emile Borel (1871-1956) nel 1898. Il concetto di misura secondo Borel era basato sul fatto che ogni insieme aperto di $\mathbb{R}$ si può scrivere come unione numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.

Allora, se $E \subset \mathbb{R}$ è un insieme aperto e limitato e se $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di intervalli aperti a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n$, si ha che

$$m(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} |I_n|$$

Questa è la *misura* secondo Borel di insiemi aperti, questa misura è finita quando E è limitato.
La misura introdotta da Lebesgue gode della proprietà di essere numerabilmente additiva:

Definizione 1.6. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme aperto e limitato, se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi aperti a due a due disgiunti tali che $E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$, allora

$$m(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(E_n) \quad .$$

Gli insiemi, per cui si può definire una misura, si dicono *misurabili.*
Risultano misurabili gli insiemi che si possono ottenere dagli aperti o dai chiusi ripetendo (anche infinite volte) operazioni di unione e intersezione, questi insiemi si chiamano *insiemi boreliani.* La teoria di Lebesgue si sviluppa come un proseguimento di questa teoria di Borel.

Definizione 1.7. Sia $E \in \mathbb{R}$.
La misura esterna di E viene definita come:

$$m_e(E) = \inf_{A \text{ insieme aperto, } E\subset A} m(A) \quad .$$

Definizione 1.8. Sia $E \in \mathbb{R}$.
La misura interna di E viene definita come:

$$m_i(E) = \sup_{F \text{ insieme chiuso, } F\subset E} m(F) \quad .$$

Definizione 1.9. Sia $E \in \mathbb{R}$. E si dice misurabile se $m_e(E) = m_i(E)$.

Lebesgue, partendo dalla teoria della misura, sviluppò un metodo analitico per definire l'integrale, e questo metodo mise in evidenza le differenze con Riemann. Definì infatti le *funzioni misurabili*:

Definizione 1.10. Una funzione f si dice misurabile quando, scelti due numeri reali qualsiasi a e b, risulta misurabile l'insieme

$$E = \{x : \ a < f(x) < b\} \ .$$

Quindi, per Lebesgue, le varie suddivisioni in sotto intervalli riguardano l'insieme delle immagini della funzione e non il suo dominio.

Definizione 1.11. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile e sia $[m,M]$ l'intervallo delle immagini, dove m e M sono l'estremo inferiore e superiore di f.
Sia $P = \{\xi_0, ..., \xi_n\}$ una partizione dell'intervallo $[m,M]$ e, per ogni $i = 0,1,...,n-1$ si ponga

$$E_i = \{x \in [a,b] \mid \xi_i \leq f(x) \leq \xi_{i+1}\}.$$

Si costruiscono le somme

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i m(E_i) \qquad e \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{i+1} m(E_i)$$

che corrispondono alle somme inferiori e superiori considerate nell'integrale di Riemann.
Quando la norma della suddivisione di $[m,M]$ tende a zero, allora s e S convergono ad uno stesso limite che è il valore dell'**integrale di Lebesgue**

$$\int_a^b f(x)dx.$$

L'elemento di novità si questo integrale sta nella suddivisione dell'intervallo $[m,M]$ anzichè di $[a,b]$. Riportiamo alcune osservazioni:

Osservazione 1. Ogni funzione integrabile secondo Riemann è integrabile anche secondo Lebesgue, ma non viceversa.
Esistono infatti funzioni integrabili secondo Lebesgue che non sono integrabili secondo Riemann, ad esempio la funzione di Dirichelet in $[0,1]$.

Osservazione 2. La misura di Lebesgue verifica la proprietà di completa additività.

Osservazione 3. Vale il **teorema della convergenza dominata di Lebesgue**:

Teorema 1.3.4. *Se $f_n \longrightarrow f$ quasi ovunque, cioè puntualmente tranne al più in un insieme di misura nulla, e se esiste una funzione g integrabile secondo Lebesgue tale che $|f_n| \leq g$ quasi ovunque, allora f è integrabile secondo Lebesgue e si ha*

$$\int f = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \quad .$$

Questo teorema è basato sulla proprietà della convergenza monotona introdotta da Beppo Levi (1875 - 1961).

Conclusa questa parte di cenni storici sulla storia del calcolo integrale, nel secondo e terzo capitolo si parlerà di integrali da un punto di vista didattico rivolto a studenti del liceo scientifico.

Capitolo 2

Insegnamento e apprendimento del concetto di integrale

L'integrale è uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica e il suo sviluppo, come abbiamo visto nel capitolo precedente, ha occupato una buona parte della storia e della ricerca matematica. Gli studenti liceali giungono allo studio di questo argomento alla fine della loro carriera scolastica, infatti secondo le vigenti direttive del Ministero della Pubblica Istruzione, questo argomento può essere introdotto nel corso del quinto anno dei licei scientifici di ordinamento e di solito viene affrontato nei mesi di Aprile e Maggio. Gli integrali occupano un grande spazio nello studio del primo anno di studenti universitari iscritti a discipline scientifiche (in particolar modo alla scuola di scienze e ingegneria), non troppo distanti quindi dai loro colleghi di quinta superiore.

In questo capitolo ci occuperemo di presentare il *sapere da insegnare*[1] seguendo le Indicazioni Nazionali per i licei scientifici, analizzeremo poi alcune proposte didattiche di Bramanti[2] relative alla definizione di integrale e al teorema fondamentale del calcolo integrale per poi capire come sono pre-

[1] In G.Bolondi e M.I.Fandiño Pinilla, *Metodi e Strumenti per l'Insegnamento e l'Apprendimento della Matematica*, pag 55, EdiSES, 2013.

[2] Marco Bramanti, professore di analisi presso il Politecnico di Milano.

sentati e organizzati questi due argomenti nei libri di testo delle superiori e dell'università.

2.1 Le Indicazioni Nazionali riguardo il *sapere da insegnare*

Nell'insegnamento della matematica (e in generale in tutte le materie) la pianificazione e gestione dei fenomeni didattici non può avvenire casualmente o essere dettato solo dallo scopo di "finire di programma". La ricerca in Didattica della Matematica ha come scopo quello di aiutarci a comprendere le dinamiche che si instaurano tra insegnante, allievo e sapere, tre elementi fondamentali che caratterizzano l'insegnamento in aula.
Quando si parla di didattica della matematica, distinguiamo due tipologie:

- didattica A;
- didattica B.

La didattica A ha come obiettivo quello di creare situazioni migliori per l'insegnamento avendo come limite la mancanza del *transfer cognitivo* di quanto si è appreso alla conoscenza generalizzata; la didattica B si concentra sul processo di apprendimento della materia.

Guy Brousseau, padre della Didattica della Matematica, considera il fenomeno dell'insegnamento - apprendimento come l'interazione dei tre elementi principali in gioco che sono l'insegnante, l'allievo e il sapere e non come il contributo singolo di ciascuno di essi. Per mettere in evidenza l'importanza del legame che questi hanno in didattica della matematica, riportiamo un *modello didattico* ovvero il Triangolo di Yves Chevallard [3] (Figura 2.1), che pone questi tre soggetti ai vertici di un triangolo, i cui lati rappresentano i rapporti che si instaurano tra di loro.

[3] In G.Bolondi e M.I.Fandiño Pinilla, *Metodi e Strumenti per l'Insegnamento e l'Apprendimento della Matematica*, pag 55, EdiSES, 2013.

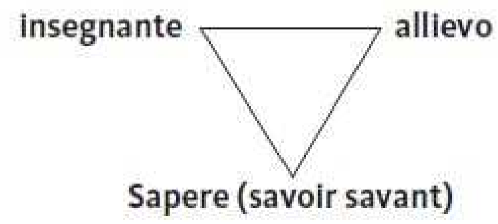


Figura 2.1: *triangolo della didattica*

Concentriamoci sul lato **insegnante - sapere**.
L'insegnante assume un ruolo di mediatore tra lo studente e il *sapere*, chiamato da Chevallard [4] *savoir savant* (tradotto nel nostro caso specifico *sapere matematico*).

Il *sapere da insegnare* deve essere contestualizzato dall'insegnante rispetto all'ambito in cui si trova; deve infatti rielaborare il sapere, trasformarlo e adattarlo alla realtà della propria classe ovvero deve effettuare una *trasposizione didattica* dal sapere al sapere insegnato. Diverso sarà, invece, il *sapere appreso* dagli studenti poiché sarà frutto di un'interpretazione individuale fatta in base alle proprie conoscenze e attese. Riguardo al *sapere da insegnare*, i docenti devono sicuramente adattare il tutto rispetto al loro ambiente classe, ma anche attenersi a quanto scritto nelle Indicazioni Nazionali riguardo le *linee generali e competenze* e gli *obiettivi specifici di apprendimento.* Facendo riferimento alle Indicazioni Nazionali[5] pubblicate nel 2010 possiamo osservare che, per quanto riguarda il calcolo integrale, gli obiettivi specifici di apprendimento sono gli stessi per tutti i licei (liceo scientifico, classico, linguistico, delle scienze umane, artistico e musicale).

[4]Una delle figure più importanti in Didattica della Matematica francese.

[5]Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'art. 10, comma 3, del d.P.R. 15 marzo 2010.

Troviamo infatti tra gli obiettivi specifici di apprendimento alla voce Relazioni e Funzioni del quinto anno:

> [...] Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale - in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità - anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonchè a determinare aree e volumi in casi semplici.

Si osserva subito che non vengono date indicazioni metodologiche relative alla trattazione dell'argomento, inoltre sembra molto più importante che lo studente raggiunga l'obiettivo di saper inquadrare l'integrale nel contesto storico e rispetto alle applicazioni in campo fisico e meccanico rispetto al raggiungimento di una dimestichezza e familiarità nel calcolo e nella risoluzione dei problemi.

Sul testo *Matematica 2004*[6] si possono leggere le indicazioni:

> L'ordine e il modo in cui si introducono i concetti di derivata, integrale, primitiva, funzione integrale dipendono dalle scelte didattiche dell'insegnante. La storia della matematica può essere di aiuto e di guida a queste scelte. Il teorema del calcolo integrale può essere illustrato anche facendo ricorso a visualizzazioni.

Viene sottolineata l'importanza dell'analisi storica che può essere fondamentale per indentificare alcuni ostacoli che si manifestano tramite errori ricorrenti nel processo di apprendimento degli alunni, e anche il fatto che non ci sono particolari indicazioni metodologiche a cui l'insegnante deve attenersi.

[6] a cura dell' UMI - CIIM.

2.2 Come e perché insegnare gli integrali

Abbiamo già detto che il calcolo integrale è generalmente uno degli argomenti conclusivi del percorso di uno studente del liceo scientifico e uno degli argomenti principali dello studio dei primi anni di un universitario iscritto a facoltà scientifiche o ingegneria. Solitamente l'approccio al calcolo integrale avviene dopo aver affrontato nell'ordine il concetto di limite e quello di derivata, anche se questi concetti sono storicamente nati in ordine inverso, il primo a comparire è quello di integrale, segue quello di derivata e, infine, quello di limite.

La derivata e l'integrale sono sicuramente due argomenti fondamentali per uno studente del liceo scientifico e la relazione che c'è tra integrale e funzione primitiva porta molto spesso i ragazzi a confondere i due concetti. Dal punto di vista dell'insegnamento didattico i due argomenti presentano profonde differenze. Lo studio della derivata viene proposto in modo assolutamente standardizzato, la definizione è sempre la stessa su tutti i libri di testo e viene spesso citata come slogan "la derivata è il limite del rapporto incrementale", alla definizione si lega l'aspetto geometrico (coefficiente della retta tangente) e quello cinematico della derivata (la velocità istantanea di variazione di una grandezza). Una volta insegnate e apprese tutte le tecniche di calcolo, gli alunni diventeranno abili calcolatori nel trovare le derivate di numerose funzioni.

La teoria dell'integrazione invece è molto diversa. La definizione non è una sola, ma esistono vari modi per introdurre il concetto. Qui riportiamo alcune proposte tratte da un articolo di Marco Bramanti[7] riguardo alla presentazione della teoria dell'integrazione a studenti di scuola secondaria: la prima è quella dell'estremo superiore delle somme inferiori/estremo inferiore delle somme superiori, la seconda è il limite di una successione di somme di Cauchy - Riemann. Naturalmente la definizione di integrale non si può dare in una sola riga o con una sola formula, anche se alcuni insegnanti definiscono l'integrale

[7] Marco Bramanti, *Emmeciquadro*, numero 36, Agosto 2009.

come l'area sotto a una curva. *La teoria dell'integrazione è delicata, difficile e, diciamolo pure, pesante. [...] Tutto ciò non significa necessariamente che questo argomento sia percepito come difficile da studenti e insegnanti; solitamente gli insegnanti adottano un percorso ben collaudato, e gli studenti lo seguono come ne seguono altri*, sostiene sempre Bramanti.
Si corre allora il rischio che:

- lo studente impari a calcolare gli integrali definiti, con capacità di calcolo ottime ma dimenticandosi che cosa sono e cosa rappresentano;
- lo studente faccia confusione tra la definizione di integrale definito, indefinito e funzione integrale e tra la definizione di derivata e funzione primitiva;
- quando nello studio della fisica lo studente incontrerà una grandezza che viene definita come l'integrale di un'altra, farà fatica a capire il perché è cosi: non avviene cioè una *trasposizione didattica*[8].

2.2.1 La definizione di integrale definito

Bramanti suggerisce, attraverso una proposta didattica rivolta agli insegnanti, di definire l'integrale come il limite di una successione di somme di Cauchy - Riemann (Definizione 1.1) rispetto al tradizionale approccio quale estremo superiore delle somme inferiori ed estremo inferiore delle somme superiori quando queste coincidono. Naturalmente presentare l'integrale definito come l'area sottesa ad una curva non è corretto perché è proprio per definire quest'ultima che si introduce il concetto di integrale, similmente a

[8] *attraverso la trasposizione didattica e le situazioni di apprendimento, a tutti gli studenti è permesso di apprendere per generare, processare e gestire informazioni complesse, pensare sistematicamente e criticamente, prendere decisioni ponderando diverse forme di risultati, rispondere a domande significative poste su differenti aspetti, essere adattabili e flessibili all'integrazione di nuove informazioni, essere creativi e capaci di identificare e risolvere problemi di vita reale.* E. Morin, *I sette saperi necessari all'educazione del futuro*, Raffaello Cortina Editore, 2001.

come qualche studente ritiene che la "pendenza della retta tangente al grafico della funzione" sia una definizione di derivata. Se ciò che ci interessa non è presentare la teoria in modo rigoroso e quindi si è disposti a rinunciare a dimostrare tutto, questa proposta ha sicuramente dei vantaggi; se invece si vuole presentare l'integrale definito dimostrando tutte le sue proprietà, sicuramente questa strada non è una delle più semplici. I vantaggi che si possono trarre da questa presentazione sono i seguenti:

- la definizione è sicuramente più breve;
- il limite di una successione appare come un concetto più operativo rispetto all'estremo superiore o inferiore;
- le somme di Cauchy - Riemann risultano essere un ragionamento chiarificatore in tutti i ragionamenti fisici in cui una certa grandezza è l'integrale definito di un'altra;
- permette di dimostrare alcune proprietà come la monotonia e la linearità in modo immediato;
- presenta in modo corretto il concetto di area sottesa al grafico di una funzione.

2.2.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Un'altra proposta didattica di Bramanti riguarda la presentazione del teorema fondamentale del calcolo integrale. Di solito con questo nome si intendono due cose:

Teorema 2.2.1. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua, e sia* ϕ *una sua primitiva in* $[a, b]$. *Allora:*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \phi(b) - \phi(a)$$

che lui chiama primo teorema fondamentale del calcolo integrale (è anche conosciuto come *formula di Newton - Leibniz*), e:

Teorema 2.2.2. *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann. Sia F la funzione integrale di f tale che:*

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \qquad F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad con \ a \leq x \leq b \ .$$

Allora:
- F è continua in ogni punto di $[a, b]$;
- se f è continua in x_0, allora F è derivabile in x_0 e si ha che

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

che chiama secondo teorema del calcolo integrale.
Solitamente il percorso che gli insegnanti seguono è il seguente: dopo la definizione di integrale definito e le sue proprietà, introducono il concetto di funzione integrale, quindi enunciano il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale, per poi presentare il primo come conseguenza.
Quello che Bramanti propone è un diverso approccio: dopo la definizione e le proprietà dell'integrale, si dimostra il primo teorema fondamentale del calcolo integrale senza ricorrere al concetto di funzione integrale e al secondo teorema fondamentale:

Teorema 2.2.3. *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia G una sua primitiva in $[a, b]$. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ G(b) - G(a) \ .$$

Dimostrazione. Suddividiamo $[a, b]$ in n intervallini:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

e scriviamo:

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(x_n) - G(x_0) = \\ &= [G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] + ... + \\ &+ [G(x_1) - G(x_0)] = \textstyle\sum_{k=1}^n (G(x_k) - G(x_{k-1})). \end{aligned}$$

Applichiamo il teorema del valor medio su ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ e tra le ampiezze degli intervalli indichiamo con δ quella massima, allora esisterà un $t_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tale che:

$$\begin{array}{rcl} G(b) - G(a) & = & \sum_{k=1}^{n}(G(x_k) - G(x_{k-1})) = \\ & = & \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})G'(t_k) = \\ & = & \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(t_k). \end{array}$$

Allora per $\delta \longrightarrow 0$ (anche tutte le altre ampiezze tendono a 0) si ha che

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx \; .$$

$\square$

Dopo aver dimostrato ciò si apre il capitolo dei metodi di integrazione. In seguito, se l'insegnante lo riterrà opportuno, si presenterà il concetto di funzione integrale e il secondo teorema fondamentale. Secondo Bramanti la funzione integrale usata per dimostrare questo teorema, risulta essere più una tradizione che una vera necessità, infatti viene introdotta come funzione ausiliaria per dimostrare il teorema. È sicuramente più semplice presentare a dei ragazzi l'integrale definito e le sue proprietà, poi questo teorema come dimostrato precedentemente e in un secondo tempo la funzione integrale, essa infatti costituisce un argomento importante nello studio dell'analisi, ma non irrinunciabile.

Un'osservazione importante a questa proposta: in qualunque modo si dimostri il teorema, si presuppone il risultato che afferma l'integrabilità delle funzioni continue. Solitamente, a scuola, questo non viene dimostrato e non gli si attribuisce la giusta importanza. Esso deriva dal Teorema di **Heine - Cantor**, il quale afferma che:

Teorema 2.2.4. *Una funzione f si dice **uniformemente continua** su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ se $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$, tale che $\forall\ x',\ x'' \in [a, b]$, si ha che:*

$$|x' - x''| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \ \varepsilon \; .$$

Da cui segue il teorema dell'integrabilità delle funzioni continue:

Teorema 2.2.5. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a, b]$*, allora* f *è integrabile in* $[a, b]$*.*

Dimostrazione. Anzitutto, per il Teorema di Weiestrass , f è limitata in $[a, b]$ e per il teorema di Heine - Cantor f è uniformemente continua in su $[a, b]$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall\ x, y\ in\ [a, b], \quad |x - y| < \delta\ .$$

Sia $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$ con $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Allora:

$$|S(f, P) - s(f, P)| = \sum_{k=1}^{n} |\sup_{x \in [x_{k-1},\ x_k]} f(x)\ -\ \inf_{x \in [x_{k-1},\ x_k]} f(x)| \cdot |x_k - x_{k-1}|\ .$$

Per il teorema di Weiestrass si ha che $\forall\ k\ \in\ 1, 2, ..., n\ \ \exists\ x'_k$ e $x''_k\ \in\ [x_{k-1}, x_k]$ tali che

$$f(x'_k) = \sup_{x \in [x_{k-1},\ x_k]} f(x) \qquad f(x''_k) = \inf_{x \in [x_{k-1},\ x_k]} f(x)$$

D'altra parte $|x'_k - x''_k| < \delta$ e per l'uniforme continuità si ha che

$$|f(x'_k) - f(x''_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Allora:

$$|S(f, P) - s(f, P)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| = \varepsilon\ .$$

□

Quindi, se si dimostra il teorema fondamentale del calcolo integrale mediante il concetto di funzione integrale occorre sapere che la funzione integrale di un'integranda continua esiste; se invece lo si dimostra come proposto da Bramanti, si presuppone già la conoscenza del Teorema 2.2.5 (integrabilità delle funzioni continue) e di conseguenza anche del teorema di Weierstrass (su cui si basa tutta la teoria). Un'altra osservazione alla dimostrazione proposta da Bramanti riguarda il fatto che i punti t_k non vengono scelti in modo arbitrario, ma secondo il teorema del valor medio.

Contrariamente alla maggior parte dei libri di testo, Barozzi Dore e Obrecht nel loro *Elementi di Analisi Matematica*[9] seguono esattamente questa proposta didattica presentandola in modo completo ed esaustivo, lo analizzeremo nel prossimo paragrafo.

2.3 I libri di testo

Negli ultimi anni, si è assistito ad una vasta produzione di materiale didattico al fine dell'insegnamento - apprendimento. Sono infatti in commercio numerosi libri di testo per lo studio di molte materie, manuali, eserciziari, in forma sia cartacea sia multimediale. Gli insegnanti e gli studenti dispongono di accessi a piattaforme online dove trovano ulteriori esercizi, schede di approfondimento, video lezioni, ecc. Il libro che gli insegnanti ricercano, per poi consigliarlo agli alunni, è un testo il più chiaro possibile, utilizzabile, che sia concreto negli esempi, che sia di aiuto al loro lavoro e allo studio dei ragazzi.

> *Il libro di testo non può sostituire l'insegnante perché è concepito per affiancare il lavoro dell'insegnante in aula; è un sostegno, ma è anche un prodigo consigliere di attività, una riserva inesauribile di suggerimenti.*[10]

Il libro si testo nasce dall'elaborazione di un'idea forte che consiste nella scelta dei contenuti e nella metodologia proposta:

> *la scelta dei contenuti nasce dall'esperienza non solo dell'autore, ma anche dei suoi colleghi, degli insegnanti e dalle loro osser-*

[9] *Elementi di Analisi Matematica Volume 1*, G.C. Barozzi G. Dore E. Obrecht, Zanichelli.

[10] B. D'Amore, *La Vita Scolastica.* Inserto: Adotta una idea. Vol. 61, n° 15, pag 2-3-9, 2007.

vazioni, dalle loro critiche costruttive al sistema scolastico diffuso [...] la scelta metodologica, nasce dall'osservazione empirica, pratica, nel quotidiano della vita scolastica, ma anche dall'esperienza; per esempio, l'insegnante sa bene a priori quali siano i punti più complessi, quelli che costituiscono ostacolo all'apprendimento; è in questi specifici temi che si assiste al fenomeno della differenziazione degli apprendimenti, è su questi temi che si assiste al bisogno, sempre contemporaneo, di approfondimento e di recupero, il primo per quegli allievi che costruiscono conoscenza in maniera positiva, il secondo per quegli allievi che presentano difficoltà, qualunque ne sia la causa.
Ecco il perché dell'esigenza di una idea forte a sostegno del libro: una idea di scelta e di metodologia che assicura all'insegnante che sfrutterà l'aiuto, il supporto del libro per la propria azione didattica[10]

In questo paragrafo ci occuperemo di analizzare alcuni libri di testo, in particolar modo rispetto alla definizione di integrale definito e il teorema fondamentale del calcolo integrale, tenendo presente quando detto nel paragrafo precedente.

I libri che analizzeremo sono i seguenti:

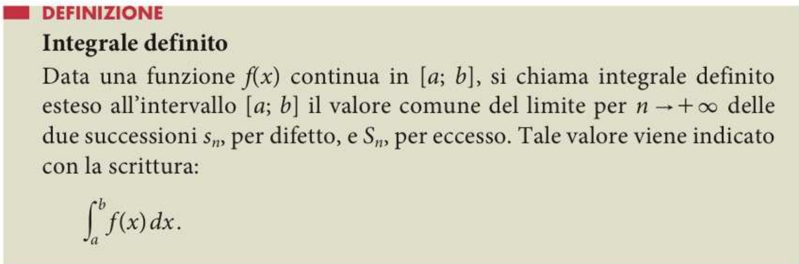
- *Manuale.blu 2.0 - 5*, M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, Zanichelli editore, Bologna, 2011
adottato dalla maggior parte dei licei scientifici negli ultimi anni e testo in possesso degli studenti su cui abbiamo effettuato il questionario sul calcolo integrale (che presenteremo nel capitolo successivo);

- *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 1*, E. Lanconelli, Pitagora Editrice Bologna, 1994
testo universitario adottato nelle facoltà scientifiche per i corsi di base di

analisi matematica;

- *Elementi di analisi matematica. Volume 1*, G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Zanichelli editore, Bologna, 2012
testo universitario adottato nella facoltà di ingegneria per il corso di analisi matematica 1.

Incominciamo con l'analizzare il libro di testo ***Manuale.blu 2.0 - 5***. Al suo interno gli integrali sono trattati in due capitoli: il numero 28 dedicato allo studio degli integrali indefiniti, il numero 29 dedicato a quelli definiti, ci concentreremo su quest'ultimo. Il capitolo inizia con due definizioni di integrale: la prima per funzioni continue a cui si giunge tramite le somme superiori e inferiori, la seconda per classi più ampie di funzioni a cui si giunge attraverso le somme di Cauchy - Riemann. Quest'ultima viene indicata come definizione generale dell'integrale definito ed è caratterizzata dal fatto che l'ampiezza dei sottointervalli può essere scelta in modo arbitrario contrariamente alla prima definizione in cui gli intervalli erano stati presi tutti della stessa ampiezza. Si arriva così a definire l'integrale due volte nelle prime pagine del capitolo:


DEFINIZIONE

Integrale definito

Data una funzione $f(x)$ continua in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore comune del limite per $n \to +\infty$ delle due successioni s_n, per difetto, e S_n, per eccesso. Tale valore viene indicato con la scrittura:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Figura 2.2: *prima definizione di integrale definito*

DEFINIZIONE

Integrale definito

Data una funzione $f(x)$, continua in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore del limite per Δx_{max} che tende a 0 della somma $\overline{S}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_{max} \to 0} \overline{S}.$$

Figura 2.3: *seconda definizione di integrale definito*

Nel libro sotto alla Figura 2.3 viene specificato che se si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in parti uguali e in ciascuna di queste si considera il valore massimo o minimo di $f(x)$, si ritrova la definizione della Figura 2.2.

Nel testo sono riportate entrambe le definizioni e come si giunge ad esse, non in modo esaustivo ma comunque abbastanza completo per essere un libro indirizzato a studenti del liceo, infatti viene dedicato molto più spazio al calcolo delle aree delle figure. Presupponendo il fatto che si dovrebbe porre la questione dell'equivalenza delle due definizioni (che il libro non fa), forse sarebbe stato più utile scegliere di presentarne una sola per non confondere uno studente ed evitare così di richiamare o enunciare teoremi a fianco della pagina. Infatti l'esistenza del massimo e del minimo è ricordata ai ragazzi richiamando il teorema di Weiestrass a lato (Figura 2.4):

- Poiché la funzione è continua, il teorema di Weierstrass garantisce che negli intervalli considerati esistono il minimo e il massimo assoluto.

2002

Figura 2.4: *richiamo al teorema di Weierstrass* e anche l'integrabilità delle funzioni continue è enunciata nello stesso modo dando quasi per scontato il fatto che tutte le funzioni continue siano integrabili (Figura 2.5).

Tutte le funzioni continue sono integrabili.

Se per una funzione esiste l'integrale definito in un intervallo $[a; b]$, si dice che la **funzione** è **integrabile in** $[a; b]$.

Enunciamo, senza dimostrarle, le seguenti proprietà.

Figura 2.5: *integrabilità funzioni continue*

Il teorema fondamentale del calcolo integrale viene enunciato e dimostrato dopo aver introdotto la funzione integrale (Figura 2.6):

La funzione integrale

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$. Consideriamo un punto qualsiasi x di $[a; b]$.

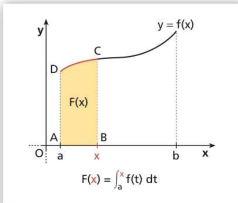
Definiamo **funzione integrale** di f in $[a; b]$ la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

che associa a ogni $x \in [a; b]$ il numero reale $\int_a^x f(t)\,dt$, dove la variabile indipendente x coincide con l'estremo superiore di integrazione. Per non creare confusione fra variabili, la funzione integranda viene indicata con $f(t)$, dove t diventa la variabile di integrazione.

Se la funzione $f(t)$ è positiva in $[a; b]$, la funzione integrale $F(x)$ rappresenta l'area del trapezoide $ABCD$ (figura 9). Tale area dipende dal valore di x, variabile nell'intervallo $[a; b]$. Dalla definizione di $F(x)$ otteniamo le seguenti relazioni:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$



Il teorema fondamentale del calcolo integrale

TEOREMA

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

per ogni punto x dell'intervallo $[a; b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x),$$

ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

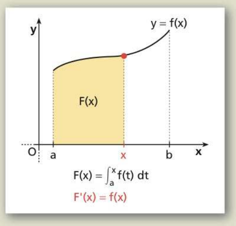


Figura 2.6: *funzione integrale e teorema fondamentale*

e viene sottolineato il fatto che da questo teorema si ottiene la formula del calcolo dell'integrale definito (indicata come formula di Leibniz - Newton), tralasciando a mio parere, l'importanza del concetto di primitiva di una funzione e della formula in quanto tale: risulta infatti racchiusa dal riquadro senza però essere evidenziata come teorema (Figura 2.7).

Questo testo a suo favore ha un'ottima organizzazione grafica delle pagine: risaltano immediatamente agli occhi le cose importanti, le distinzioni tra i concetti fondamentali e quelli meno, gli esempi e i disegni.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Abbiamo ottenuto la seguente regola.

L'integrale definito di una funzione continua $f(x)$ è uguale alla differenza tra i valori assunti da una qualunque primitiva $\varphi(x)$ di $f(x)$ rispettivamente nell'estremo superiore di integrazione e nell'estremo inferiore.

Figura 2.7: *formula di Leibniz - Newton*

Passiamo ora a ***Lezioni di analisi matematica 1***: Lanconelli descrive il calcolo integrale nel nono paragrafo del capitolo 5. Lo propone concentrandosi in modo particolare sull'aspetto teorico, tralasciando esempi e tecniche di calcolo; risulta quindi un testo strettamente indirizzato a studenti universitari di falcoltà scientifiche.

Viene infatti definito l'integrale di Riemann tramite le somme superiori e quelle inferiori (Figura 2.8):

Definizione 9.6. *Una funzione limitata* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice integrabile secondo Riemann se risulta*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

In questo caso il numero reale $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *si chiama integrale di* f *e si indica*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad \blacksquare$$

Figura 2.8: *definizione di integrale nel libro di Lanconelli*

dopodiché sono dimostrati in modo esaustivo tutti i teoremi che riguardano l'integrabilità delle funzioni: ovvero se una funzione è continua o monotona o limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità è integrabile secondo Riemann. Successivamente il teorema fondamentale del calcolo integrale viene presentato attraverso il concetto di funzione integrale (Figura 2.9), segue la definizione di primitiva (Figura 2.10) e lo stesso teorema riformulato secondo la definizione di Leibniz - Newton (Figura 2.11).

Teorema 9.18 *(teorema fondamentale del calcolo integrale). Sia* $f \in R_{[a,b]}$ *. Poniamo*

$$I_f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad I_f(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Allora:

(i) I_f *è continua in ogni punto di* $[a,b]$ *;*

(ii) *se* f *è continua in* x_0 *, allora* I_f *è derivabile in* x_0 *e si ha*

$$I_f'(x_0) = f(x_0)\,.$$

Figura 2.9: *teorema fondamentale nel libro di Lanconelli*

Definizione 9.21. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Una primitiva di f è una funzione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile in ogni punto di $[a,b]$ e tale che $\phi'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.*

Figura 2.10: *definizione di primitiva nel libro di Lanconelli*

Teorema 9.25. *Sia $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ e sia ϕ una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\phi(x)]_a^b,$$

dove

$$[\phi(x)]_a^b = \phi(b) - \phi(a).$$

Dimostrazione. La funzione $I_f : [a,b] \to \mathbb{R}, I_f(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, per il Corollario 9.19, è una primitiva di f. Per l'Osservazione 9.24 esiste allora una costante reale C tale che $I_f(x) = \phi(x) + C$ per ogni $x \in [a,b]$. Di conseguenza

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_f(b) = I_f(b) - I_f(a) = (\phi(b) + C) - (\phi(a) + C) = \\ = \phi(b) - \phi(a).$$

■

Figura 2.11: *La formula di Leibniz - Newton nel libro di Lanconelli*

Possiamo dire che questo testo presenta la teoria del calcolo integrale di Riemann senza tralasciare teoremi e definizioni, quello che manca sono gli esempi e soprattutto i disegni, fondamentali alleati all'apprendimento dei concetti durante lo studio.

Il capitolo 6 di ***Elementi di analisi matematica. Volume 1*** sviluppa la teoria dell'integrazione secondo due impostazioni alternative. Nella prima viene definito l'integrale per le funzioni continue attraverso le somme di Cauchy - Riemann e tutte le sue proprietà: la linearità, la monotonia e l'additività (Figure 2.12 e 2.13).

suddivisione di un intervallo

6.2.3. Definizione. Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; poniamo $h_n = (b - a)/n$,

$$x_i = a + i\,h_n\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Risulta allora $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e $x_i - x_{i-1} = h_n$, per $i = 1, 2, \ldots, n$. L'insieme $\sigma_n = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \}$ viene detto *suddivisione* dell'intervallo $[a, b]$.

somma di Riemann

6.2.4. Definizione. Siano $f \in C\big([a, b], \mathbb{R}\big)$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\sigma_n = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \}$ la suddivisione di $[a, b]$ in n sottointervalli congruenti. Per $i = 1, 2, \ldots, n$, in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ scegliamo un punto c_i , cioè $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$; in tal caso, diciamo che la *scelta di punti* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ è subordinata alla suddivisione σ_n . Chiamiamo *somma di Riemann* della funzione f , relativa alla suddivisione σ_n e alla scelta di punti $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, il numero reale

$$S_R(f; c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,.$$

Figura 2.12: *somme di Cauchy - Riemann*

6.2.8. Definizione. Sia $f \in C\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Chiamiamo *integrale* di f il limite delle successioni di somme di Riemann, la cui esistenza e indipendenza dalle scelte di punti effettuate sono assicurate dal Teor. 6.2.5; lo indichiamo col simbolo

integrale di una funzione continua

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

che si legge "integrale da a a b di f di x in di x".

Figura 2.13: *integrale di una funzione continua*

La seconda impostazione invece, definisce l'integrale e relative proprietà per una classe di funzioni più ampia attraverso le somme superiori e le somme inferiori. Si può osservare che questo testo e quello per i licei sviluppano queste due alternative in modi opposti: quello delle superiori definisce l'integrale per funzioni continue attraverso le somme superiori e inferiori e definisce l'integrale per classi di funzioni più ampie attraverso le somme di Cauchy - Riemann, questo di Barozzi fa esattamente il contrario. Quest'ultimo dedica poi un'intera sezione ad esporre e dimostrare alcune condizioni sufficienti affinchè una funzione sia integrabile, in particolare si dimostra l'integrabilità delle funzioni continue richiamando il teorema di Heine - Cantor.

Al teorema fondamentale del calcolo integrale viene dedicato un intero paragrafo: questo libro è uno dei pochi che segue l'impostazione suggerita da Bramanti nel paragrafo precedente. Si può osservare, nella Figura 2.14, che la dimostrazione non usa il concetto di funzione integrale, ma è esattamente quella proposta nel Teorema 2.2.3, e a differenza di quanto detto nel paragrafo precedente, qui tutti i teoremi utili alla dimostrazione vengono enunciati e dimostrati nelle pagine prima.

primo teorema fondamentale del calcolo integrale

6.5.1. Teorema (primo teorema fondamentale del calcolo integrale).
Sia $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ (v. Def. 5.9.2). Allora

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,.$$

Dimostrazione. Poiché, per ipotesi, $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, la funzione derivata f' è continua. Se $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \Sigma_{[a,b]}$,[2] applicando il Teorema di Lagrange 5.6.2 a ciascuno degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$, otteniamo che esiste una scelta di punti $c(\sigma) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, con $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, per cui

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^{n} f'(c_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

L'ultima somma scritta è una somma di Riemann per la funzione continua f'; pertanto, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \sigma_\varepsilon \in \Sigma_{[a,b]}$, tale che, qualunque sia la scelta di punti $c(\sigma_\varepsilon)$ si abbia

$$\left| \int_a^b f'(x)\,dx - S_R\big(f'; \sigma_\varepsilon, c(\sigma_\varepsilon)\big) \right| \le \varepsilon\,.$$

Ne consegue che, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, si ha

$$\left| \int_a^b f'(x)\,dx - \big(f(b) - f(a)\big) \right| \le \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, il teorema è dimostrato. ■

Figura 2.14: *Teorema fondamentale del calcolo integrale*

Segue poi la definizione di primitiva con una seconda versione del teorema, poi la definizione di funzione integrale con altre due versioni dello stesso teorema che utilizzano proprio questo concetto; il tutto segue una coerenza logica con il rischio però di confondere gli studenti con così tante formulazioni dello stesso teorema. Questo testo presenta la teoria del calcolo integrale in modo rigoroso: tra i libri analizzati è sicuramente il più completo, sono infatti presenti numerosi esempi e disegni, l'organizzazione grafica dello spazio è ottima e favorisce sicuramente gli studenti nel loro lavoro.

Capitolo 3

Il questionario sul calcolo integrale

Lo scopo iniziale della nostra ricerca era quello di verificare l'apprendimento del calcolo integrale tra i ragazzi delle classi quinte dei licei scientifici. Questo capitolo è allora dedicato all'analisi dei risultati di un questionario che è stato somministrato a studenti dell'ultimo anno di tre licei scientifici di Reggio Emilia. Oltre ad un *apprendimento algoritmico*, ovvero *l'abilità di dare risposta alle operazioni, al calcolo, all'applicazione di formule o al disegno di figure usando strumenti opportuni*[1] eravamo soprattutto interessati alla verifica di un vero e proprio *apprendimento concettuale*:

> *un concetto si considera costruito quando l'allievo è in grado di identificare proprietà di quel concetto, di rappresentarlo, di trasformare tale rappresentazione, di usarla in modo opportuno*[1].

Per questo motivo, gli esercizi inseriti nel questionario non sono semplici domande a cui il ragazzo deve rispondere limitandosi ad applicare le regole o le formule studiate, ma sono esercizi che mettono in relazione le abilità puramente meccaniche con quelle che riguardano la capacità di ragionare prima di procedere ad eseguire calcoli. Ogni quesito riguarda aspetti diversi del

[1]G.Bolondi, M.I.Fandiño Pinilla, *Metodi e Strumenti per l'Insegnamento e l'Apprendimento della Matematica*, Edises, 2013.

calcolo integrale, dalla media integrale alla formula per parti, dalla funzione primitiva al teorema fondamentale del calcolo integrale. Altro aspetto molto importante è il fatto che in ogni quesito si cerchi di legare il calcolo integrale con un argomento di analisi studiato precedentemente, come il valore assoluto, le proprietà dei logaritmi o i limiti notevoli; questo per ricordare ai ragazzi che in matematica, come in generale in tutte le altre discipline, ogni argomento non è a sé ma acquista importanza nel momento in cui si può collegare e sviluppare insieme ad altri.

Analizzeremo ora le risposte date nel questionario, lo faremo quesito per quesito, cercando di individuare eventuali problemi, misconcezioni, in quali punti i ragazzi hanno incontrato più difficoltà e in quali meno, se hanno fatto errori ricorrenti e quali, se ci sono state risposte che hanno evidenziato particolari abilità di calcolo o ragionamento oppure che hanno mostrato che l'argomento non è stato proprio capito.
La maggior parte delle domande è stata posta in modo da chiedere ai ragazzi una motivazione alle loro risposte, per cercare di capire meglio il loro livello di apprendimento.

Il questionario è stato somministrato a:

- n° 37 studenti del liceo scientifico "Ariosto - Spallanzani" di Reggio Emilia;
- n° 12 studenti del liceo scientifico "San Gregorio Magno" di Sant'Ilario d'Enza (RE);
- n° 135 studenti del liceo scientifico "Aldo Moro" di Reggio Emilia;

per un totale di 184 studenti frequentanti la quinta liceo.

In particolare, le classi sono state due al liceo Spallanzani, sei al liceo Moro e una al liceo San Gregorio.

Poiché il programma scolastico prevede che il calcolo integrale venga svolto all'incirca tra i mesi di Aprile e Maggio, il questionario è stato svolto dai ragazzi verso la metà di Maggio ed è stato somministrato ad ogni classe dal proprio insegnante di matematica. In alcune classi ero presente insieme al docente durante lo svolgimento della prova, in quelle in cui non sono stata presente avevo anticipatamente spiegato agli insegnanti la prova e dato alcune indicazioni a possibili domande che i ragazzi avrebbero potuto fare.

Tutti gli insegnanti hanno valutato le prove dei ragazzi come se fosse una vera e propria prova di verifica, ciò ha favorito sicuramente lo scopo della nostra indagine poiché i ragazzi hanno svolto la prova seriamente e non in modo approssimativo, ma sicuramente si è anche stabilito quello che Brosseau chiama *contratto didattico*, ovvero *l'allievo, giunto al momento di dover dare risposte, non si pone domande sul contenuto, ma su che cosa l'insegnante si aspetta che egli faccia o risponda*[1].

Riportiamo nella pagina seguente il testo del questionario.

Il testo del questionario

1. Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

2. Data la funzione $f(x) = |senx|$, $x \in [0, 2\pi]$,
indica tra le seguenti funzioni quali sono le primitive di f nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$
\begin{array}{ll}
A. & F(x) = \begin{cases} -cos(x) & se \;\; 0 \leq x \leq \pi \\ cos(x) + 2 & se \;\; \pi < x \leq 2\pi \end{cases} \\
B. & F(x) = |cos(x)| \;\; se \;\; x \in [0, 2\pi] \\
C. & F(x) = \begin{cases} -cos(x) & se \;\; 0 \leq x \leq \pi \\ cos(x) & se \;\; \pi < x \leq 2\pi \end{cases} \\
D. & F(x) = -|cos(x)| \;\; se \;\; x \in [0, 2\pi] \\
E. & F(x) = \begin{cases} 1 - cos(x) & se \;\; 0 \leq x \leq \pi \\ cos(x) & se \;\; \pi < x \leq 2\pi \end{cases}
\end{array}
$$

3. sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile, tale che $f'(x) = 3x$, allora si può scrivere:

A. $\int xf(x)dx \;=\; f^2(x) + c$

B. $\int 3xf^2(x)dx \;=\; f^3(x) + c$

C. $\int 2xf(x)dx \;=\; 3f^2(x) + c$

D. $\int xf^2(x)dx \;=\; \frac{1}{9}f^3(x) + c$

E. $\int 6xf^5(x)dx \;=\; f^6(x) + c$

Giustifica la tua risposta.

4. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x sent^3 dt}{x^4}$.

5. Calcola la derivata, rispetto a x, della funzione $f(x)$ tale che:
$f(x) = \int_x^{x+2} ln^2 t \; dt$, con $x > 0$.

6. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $senx$ e che $f'(0) = 1$.
Quanto vale $f(\frac{\pi}{2}) \; - \; f(0)$?

7. Sia $f(x)$ una funzione continua, di cui $F(x)$ è una primitiva.
Quale delle seguenti uguaglianze è corretta? Giustifica la tua risposta.

A. $\int e^x f(x)dx \; = \; F(x)e^x dx + \int F(x)e^x dx$

B. $\int x^2 f(x)dx \; = \; x^2 F(x) - \int 2xf(x)dx$

C. $\int f(x)cosxdx \; = \; F(x)senx \; - \; \int senxF(x)dx$

D. $\int \dfrac{f(x)}{x}dx \; = \; \dfrac{F(x)}{x} \; + \; \int \dfrac{F(x)}{x^2}dx$

E. $\int f(x) \cdot f(x)dx \; = \; F(x)f(x) \; - \; \int f(x)f'(x)dx$

3.1 Quesito 1

Il questionario si apre con il seguente quesito:

> Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

In questo quesito si chiede quindi ai ragazzi la conoscenza della formula della media integrale, di trovare il valore della x in cui la funzione assume il valor medio, ma soprattutto nella funzione è presente il valore assoluto, argomento piuttosto ostico per la maggior parte dei ragazzi, ma che studenti di quinta liceo scientifico dovrebbero ormai conoscere bene.

Abbiamo classificato le risposte nel seguente modo:

- *in bianco*;
- *corrette*;
- *parzialmente corrette*, ovvero ci riferiamo a chi ha calcolato correttamente la media integrale ma non ha svolto, o l'ha fatto in modo errato, il calcolo della x in cui la funzione assume il valor medio;
- *errate*, che possiamo suddividere in:
  - chi ha impostato bene il calcolo della media integrale, dividendo correttamente il valore assoluto ma ha fatto errori non trascurabili nel calcolo dell'integrale - indicheremo questo errore come *errore calcolo integrale*;
  - chi ha impostato in modo errato lo svolgimento - indicheremo questo errore come *impostazione iniziale errata*;
  - chi ha impostato lo svolgimento in modo corretto scrivendo ad esempio solo la formula della media integrale per la funzione data, ma non ha svolto il procedimento - indicheremo questo errore come *integrale non svolto.*

I risultati del quesito 1 sono stati i seguenti:

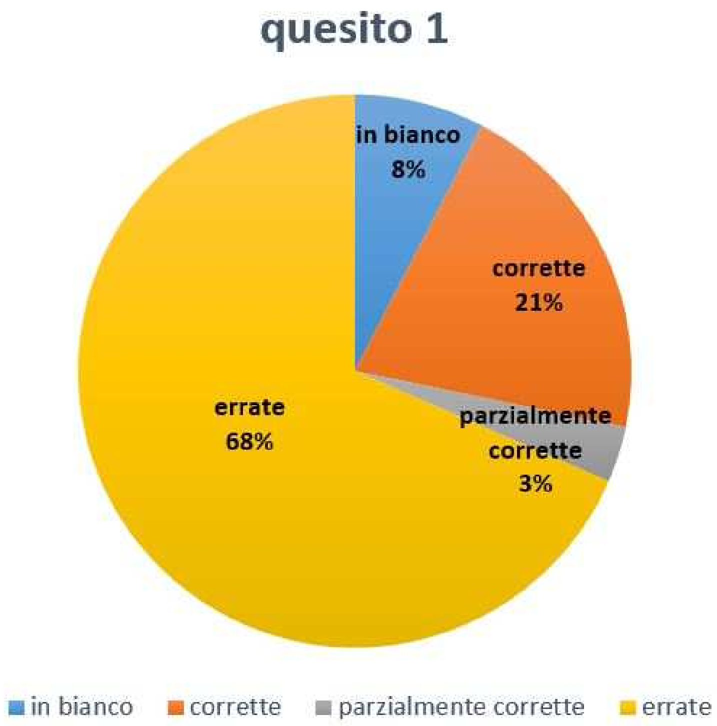


Figura 3.1: *Risposte quesito 1*

possiamo osservare che solo 38 ragazzi (il 21%) hanno svolto l'esercizio in modo corretto rispetto ai 126 (il 68% circa - una percentuale molto alta) che l'hanno svolto in modo inesatto.

Le percentuali riguardo i tipi di errore sono le seguenti:

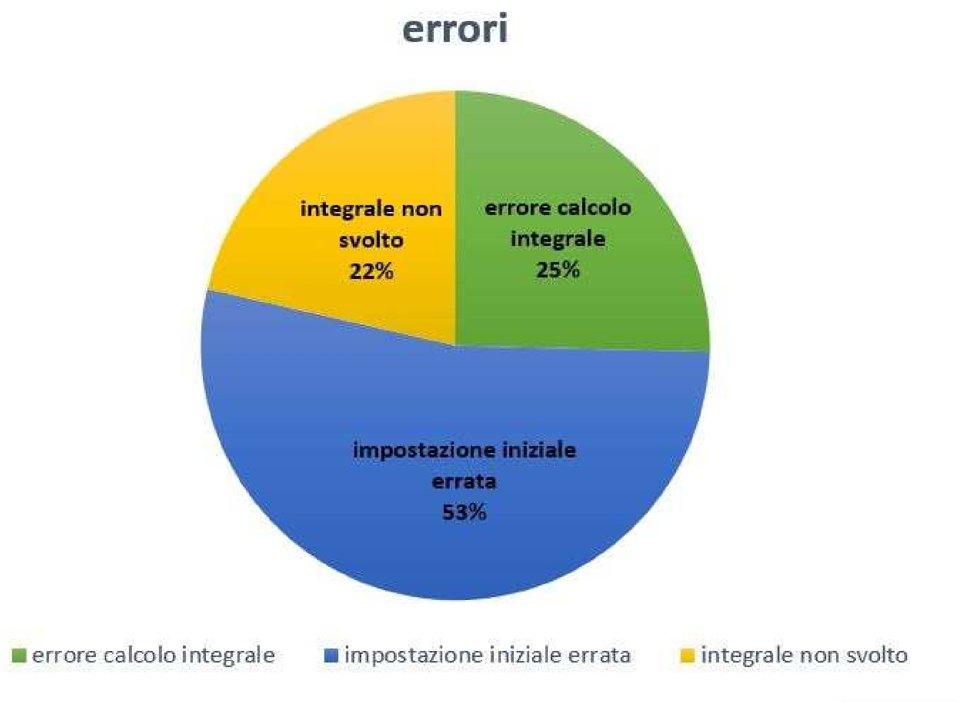
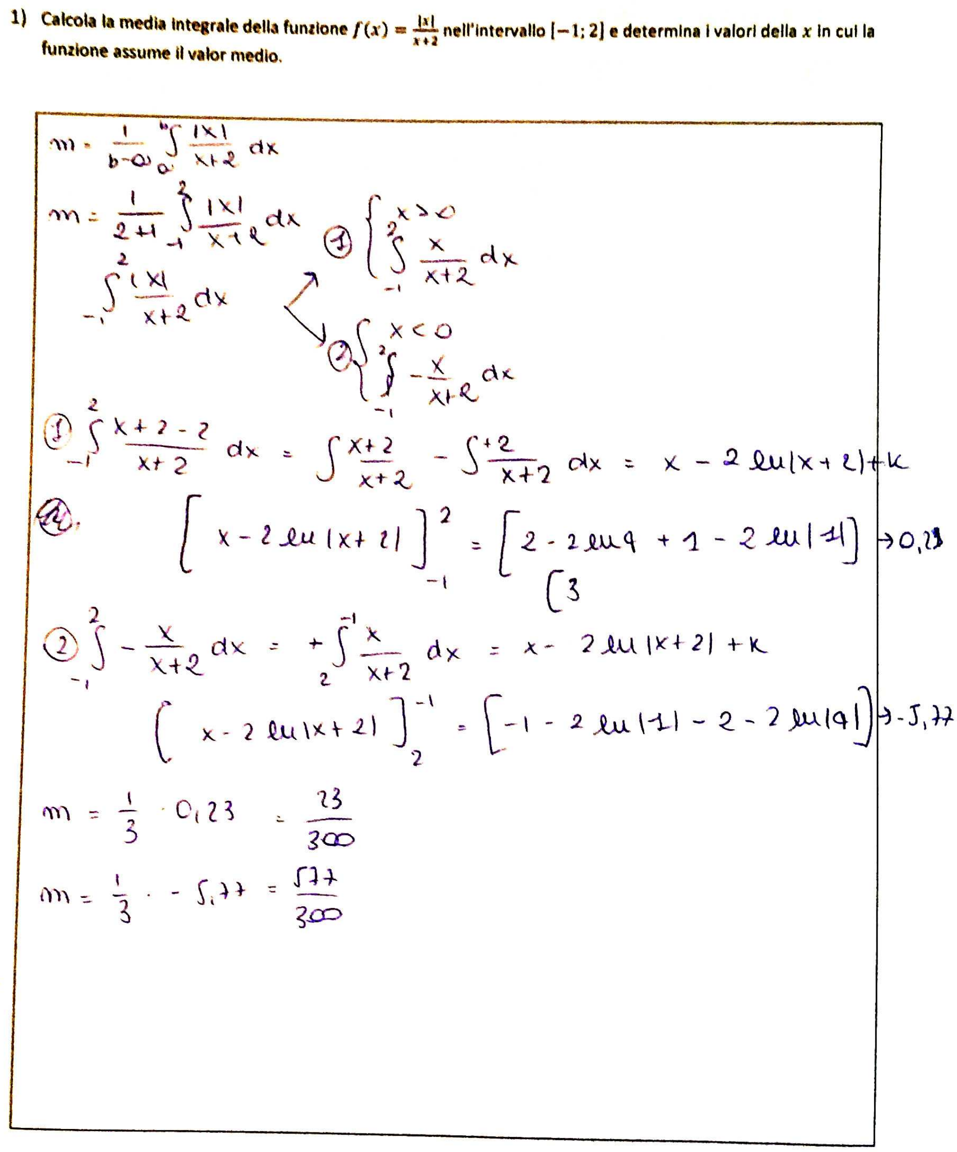


Figura 3.2: *Errori quesito 1*

Sono stati 67 gli studenti che hanno commesso l'errore che abbiamo chiamato *impostazione iniziale errata*: tra questi in molti hanno riscritto correttamente la funzione preceduta dal segno giusto sui due intervalli eliminando così il valore assoluto, ma non hanno cambiato gli estremi di integrazione che sono sempre rimasti -1 e 2 (Figura 3.3), altri invece hanno fatto la somma delle medie integrali su $[-1;0]$ e $[0;2]$ (Figura 3.4).



1) Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{|x|}{x+2}\,dx$

$m = \frac{1}{2+1}\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x+2}\,dx$

$\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x+2}\,dx$

① $\begin{cases} x > 0 \\ \int_{-1}^{2} \frac{x}{x+2}\,dx \end{cases}$

② $\begin{cases} x < 0 \\ \int_{-1}^{2} -\frac{x}{x+2}\,dx \end{cases}$

① $\int_{-1}^{2} \frac{x+2-2}{x+2}\,dx = \int \frac{x+2}{x+2} - \int \frac{+2}{x+2}\,dx = x - 2\ln|x+2| + k$

① $\left[x - 2\ln|x+2| \right]_{-1}^{2} = \left[2 - 2\ln 4 + 1 - 2\ln|1| \right] \to 0{,}23$

$[3$

② $\int_{-1}^{2} -\frac{x}{x+2}\,dx = +\int_{2}^{-1} \frac{x}{x+2}\,dx = x - 2\ln|x+2| + k$

$\left[x - 2\ln|x+2| \right]_{2}^{-1} = \left[-1 - 2\ln|1| - 2 - 2\ln|4| \right] \to -5{,}77$

$m = \frac{1}{3} \cdot 0{,}23 = \frac{23}{300}$

$m = \frac{1}{3} \cdot -5{,}77 = \frac{577}{300}$

Figura 3.3: *Impostazione iniziale errata*

1) Calcola la media integrale della funzione $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1;2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+2}, & x>0\\ -\frac{x}{x+2}, & x<0\end{cases}$$

MEDIA INTEG $= \frac{1}{0-(-1)}\int_{-1}^{0}\left(-\frac{x}{x+2}\right)dx+\frac{1}{2-0}\int_{0}^{2}\frac{x}{x+2}\,dx=$

$= -1\int_{-1}^{0}\left(-\frac{x}{x+2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{x}{x+2}\,dx=$

$x+2=t \quad dx=dt$

$x=t-2$

$= +1\int_{-1}^{0}\frac{t-2}{t}\,dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{t-2}{t}\,dt=$

$= \left[t-2\ln|t|\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\left[t-2\ln|t|\right]_{0}^{2}=$

$= -1-2\ln 1+\frac{1}{2}(2-\ln 2)=-1+1-\frac{1}{2}\ln 2=-\frac{1}{2}\ln 2$

$\frac{x}{x+2}=-\frac{1}{2}\ln 2$

$\frac{2x}{2(x+2)}=\frac{-(x+2)\ln 2}{2(x+2)}$

$2x=-x\ln 2-2\ln 2$

$x(2+\ln 2)=-2\ln 2$

$x=-\frac{2\ln 2}{2+\ln 2}$

$-\frac{x}{x+2}=-\frac{1}{2}\ln 2$

$-2x=-(x+2)\ln 2$

$-2x=-x\ln 2-2\ln 2$

$x(\ln 2-2)=-2\ln 2$

$x=\frac{-2\ln 2}{\ln 2-2}$

Figura 3.4: *Impostazione iniziale errata*

Per *errore calcolo integrale* invece, si intendono le risposte di tutti gli studenti che hanno impostato bene la risoluzione del problema ma non hanno saputo integrare correttamente la funzione: ad esempio alcuni hanno cercato di integrare per parti, altri facendo un cambio di variabile, rendendo molto complicato il calcolo e quasi impossibile un risultato corretto; come ad esempio nella Figura 3.5 dove l'integrale è stato svolto con il metodo di sostituzione, ma lo studente si è scordato di modificare gli estremi di integrazione.

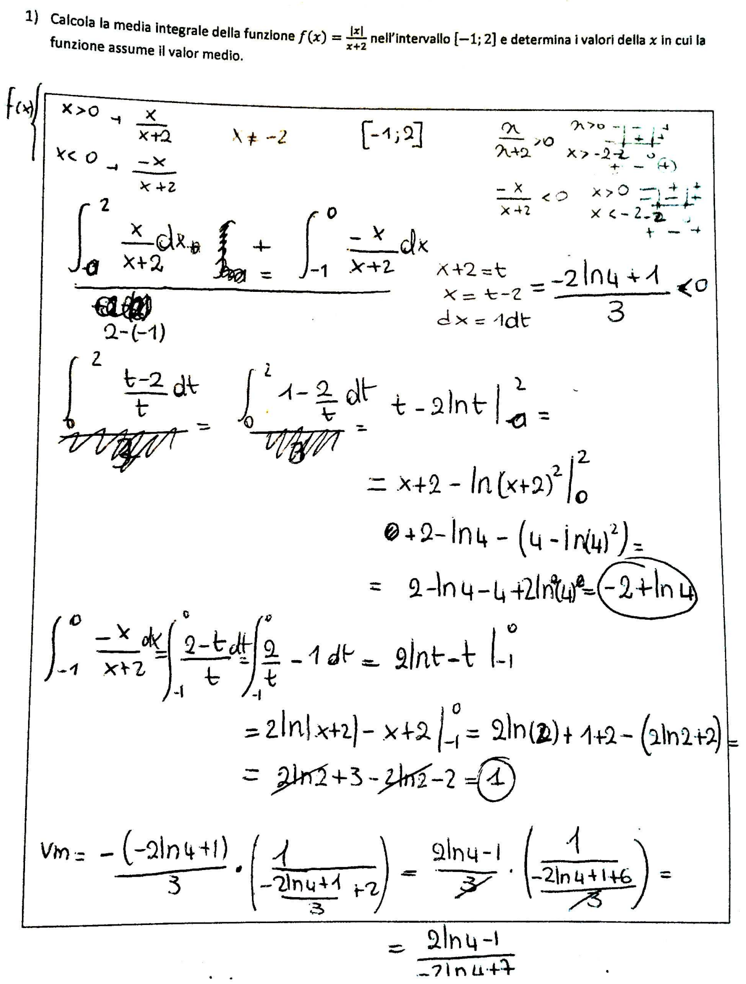
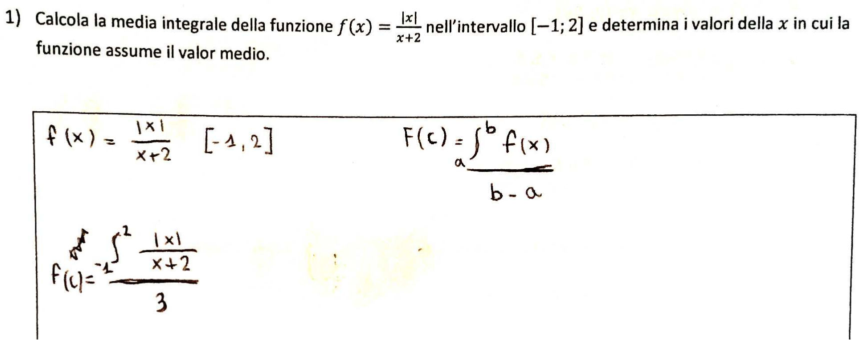


Figura 3.5: *Errore calcolo integrale*

Infine, con *integrale non svolto* intendiamo classificare le risposte dei ragazzi che hanno scritto in modo corretto la formula della media integrale per la funzione in esame, hanno scritto bene gli estremi di integrazione, hanno diviso per l'ampiezza dell'intervallo ma non hanno svolto i calcoli, come nella Figura 3.6.


1) Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

$f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ $[-1, 2]$ $F(c) = \frac{\int_a^b f(x)}{b-a}$

$f(c) = \frac{\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x+2}}{3}$

Figura 3.6: *Integrale non svolto*

Tra gli esercizi proposti nel questionario, possiamo osservare che questo è stato quello che ha dato un maggior numero di risposte sbagliate rispetto a quelle esatte. Dall'analisi delle risposte abbiamo capito che: il valore assoluto rimane ancora un argomento difficile per ragazzi di quinta liceo, la media integrale viene insegnata forse più come aspetto teorico rispetto all'uso della formula come risoluzione pratica negli esercizi, tanti ragazzi fanno molta fatica nel calcolo degli integrali.

Concludiamo questo primo quesito riportando alcune risposte errate tra le più significative, che ci lasciano intuire che per tanti ragazzi il concetto di media integrale non è proprio stato compreso e quello di valore assoluto è ancora un argomento ostico a tanti.

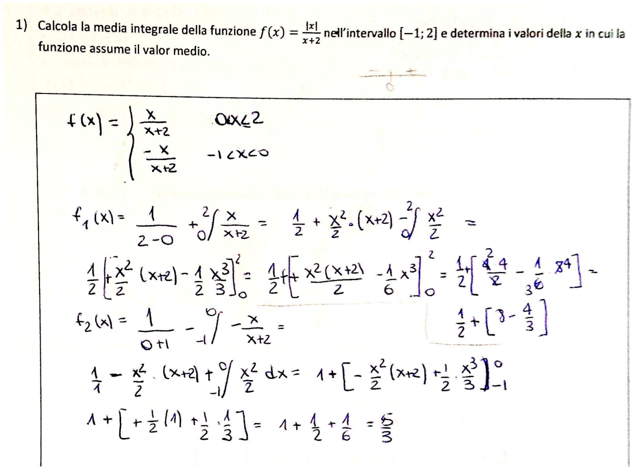


Figura 3.7: *Qui uno studente, oltre al grave errore nel calcolo dell'integrale, separa in modo corretto il valore assoluto rispetto ai due intervalli, ma nel calcolo della media integrale invece di dividere per l'ampiezza dell'intervallo, somma l'inverso dell'ampiezza dell'intervallo al valore dell'integrale della funzione sul quel determinato intervallo.*

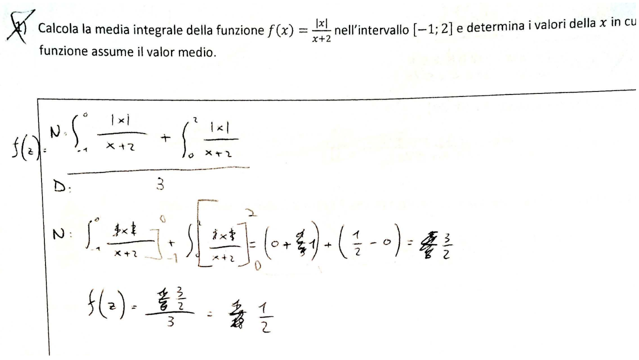
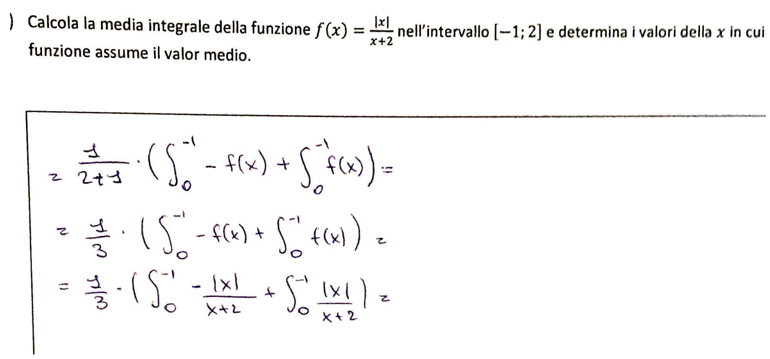


Figura 3.8: *Anche se gli estremi di integrazione vengono scelti in modo corretto, il valore assoluto rimane in entrambi gli integrali. Nel secondo passaggio, quello che lo studente identifica come N (presumibilmente di numeratore), anche se c'è il segno di integrale, il ragazzo non esegue il calcolo dell'integrale, ma semplicemente valuta la funzione negli estremi.*



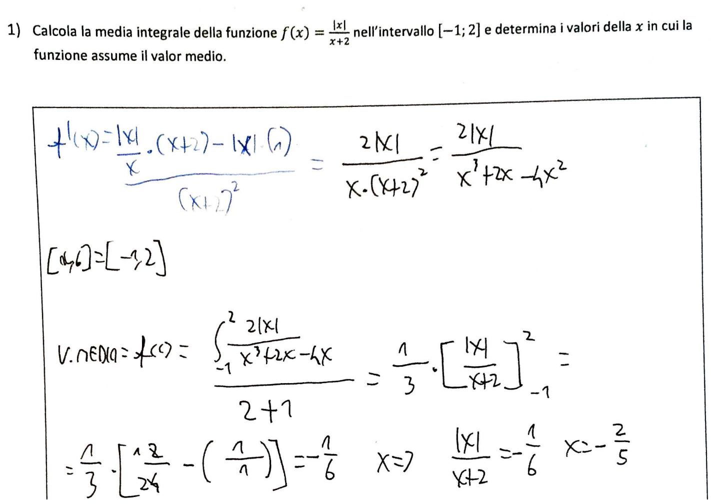
) Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui funzione assume il valor medio.

$$= \frac{1}{2+1}\cdot\left(\int_0^{-1} - f(x) + \int_0^{-1} f(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\int_0^{-1} - f(x) + \int_0^{-1} f(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\int_0^{-1} - \frac{|x|}{x+2} + \int_0^{-1} \frac{|x|}{x+2}\right) =$$

Figura 3.9: *Qui è interessante osservare che la funzione viene separata come $-f(x)$ e $f(x)$, ma l'intervallo di integrazione rimane sempre lo stesso e gli estremi sono scritti al contrario*



1) Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

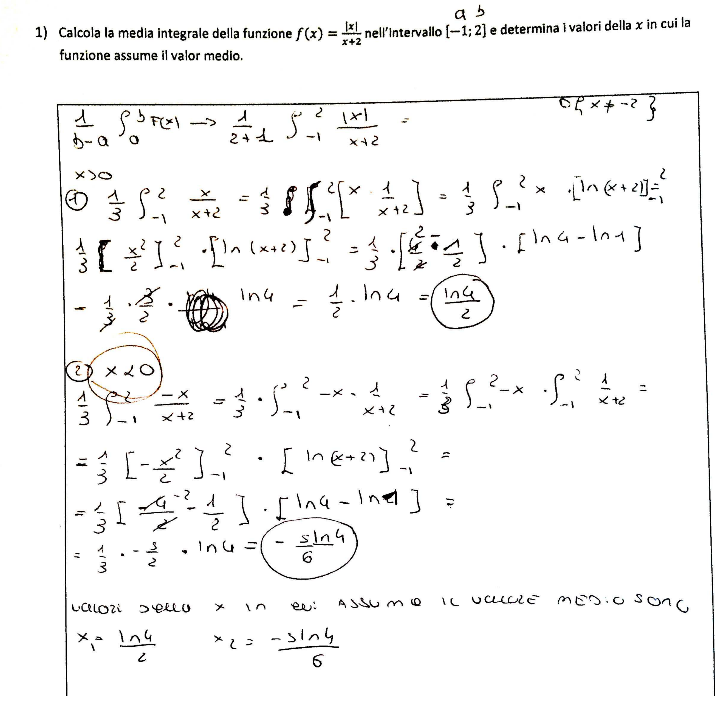
$$f'(x) = \frac{\frac{|x|}{x}\cdot(x+2) - |x|\cdot(1)}{(x+2)^2} = \frac{2|x|}{x\cdot(x+2)^2} = \frac{2|x|}{x^3+2x-4x^2}$$

$$[a;b] = [-1;2]$$

$$V.\text{medio} = f(c) = \frac{\int_{-1}^{2} \frac{2|x|}{x^3+2x-4x}}{2+1} = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{|x|}{x+2}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{12}{24} - \left(\frac{1}{1}\right)\right] = -\frac{1}{6} \quad x \Rightarrow \frac{|x|}{x+2} = -\frac{1}{6} \quad x = -\frac{2}{5}$$

Figura 3.10: *Qui lo studente decide di calcolare la derivata della funzione, per poi andare ad integrarla nella formula della media integrale.*



1) Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x) \rightarrow \frac{1}{2+1}\int_{-1}^{2}\frac{|x|}{x+2} =$ $\varnothing\{x \neq -2\}$

$x>0$

① $\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left[x\cdot\frac{1}{x+2}\right] = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}x\cdot[\ln(x+2)]_{-1}^{2} =$

$\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}\cdot[\ln(x+2)]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]\cdot[\ln 4-\ln 1]$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ln 4 = \frac{1}{2}\cdot\ln 4 = \frac{\ln 4}{2}$

② $x<0$

$\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\frac{-x}{x+2} = \frac{1}{3}\cdot\int_{-1}^{2}-x\cdot\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}-x\cdot\int_{-1}^{2}\frac{1}{x+2} =$

$=\frac{1}{3}\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}\cdot[\ln(x+2)]_{-1}^{2} =$

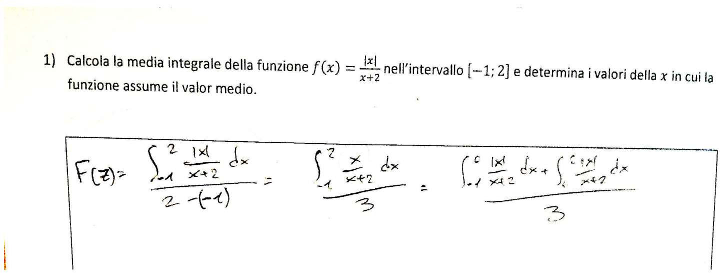
$=\frac{1}{3}\left[-\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]\cdot[\ln 4-\ln 1] =$

$=\frac{1}{3}\cdot -\frac{3}{2}\cdot\ln 4 = -\frac{5\ln 4}{6}$

valori della x in cui assumo il valore medio sono

$x_1 = \frac{\ln 4}{2}$ $\quad x_2 = -\frac{5\ln 4}{6}$

Figura 3.11: *Oltre agli estremi di integrazione presi in modo sbagliato, l'integrale viene calcolato come se fosse un prodotto. Si calcola infatti l'integrale del primo termine e lo si moltiplica per quello del secondo termine.*



1) Calcola la media integrale della funzione $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ nell'intervallo $[-1; 2]$ e determina i valori della x in cui la funzione assume il valor medio.

$F(x) = \frac{\int_{-1}^{2}\frac{|x|}{x+2}dx}{2-(-1)} = \frac{\int_{-1}^{2}\frac{x}{x+2}dx}{3} = \frac{\int_{-1}^{0}\frac{|x|}{x+2}dx+\int_{0}^{2}\frac{|x|}{x+2}dx}{3}$

Figura 3.12: *La formula della media integrale viene scritta in modo correto, il problema di questa risoluzione riguarda il modulo. Nel secondo passaggio infatti scompare e invece dovrebbe esserci; nel passaggio successivo (dove non dovrebbe esserci perché si sono divisi gli intervalli) invece ricompare.*

3.2 Quesito 2

Data la funzione $f(x) = |senx|$, $x \in [0, 2\pi]$,
indica tra le seguenti funzioni quali sono le primitive di f nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$A. \quad F(x) = \begin{cases} -cos(x) & se \ \ 0 \leq x \leq \pi \\ cos(x) + 2 & se \ \ \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$B. \quad F(x) = |cos(x)| \ \ se \ \ x \in [0, 2\pi]$$

$$C. \quad F(x) = \begin{cases} -cos(x) & se \ \ 0 \leq x \leq \pi \\ cos(x) & se \ \ \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$D. \quad F(x) = -|cos(x)| \ \ se \ \ x \in [0, 2\pi]$$

$$E. \quad F(x) = \begin{cases} 1 - cos(x) & se \ \ 0 \leq x \leq \pi \\ cos(x) & se \ \ \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Attraverso il secondo quesito si chiedeva agli studenti quale potesse essere la primitiva di una funzione trigonometrica, racchiusa dal valore assoluto. Ancora una volta compare il valore assoluto, ma differentemente dal quesito precedente sembra che i ragazzi non abbiano avuto particolari problemi con il segno della funzione.

Per rispondere a questo quesito si chiedeva agli studenti di crocettare la risposta/le risposte corrette. Lo scopo iniziale di questa domanda, era testare la capacità dei ragazzi nel riconoscere che ci sono tra le possibili risposte funzioni non continue e quindi che non possono essere primitive perché non derivabili, quindi l'unica risposta corretta è l'opzione A. Poi però, riflettendo sul fatto che la continuità di una funzione non è ancora un concetto del tutto familiare per un ragazzo di quinta liceo, abbiamo deciso di classificare a parte l'insieme delle tre risposte A, C, E, in quanto le funzioni di C ed E, che non sono continue, hanno però la derivata che si desidera in ogni punto in cui sono continue (e derivabili).

Le risposte date sono state suddivise nel seguente modo:

- A+C+E;
- in bianco;
- B+D;
- solo l'opzione C;
- solo opzione A, evidenziando di fianco che è l'unica continua;
- altre combinazioni, in tanti infatti hanno risposto combinando tra loro diverse opzioni comunque in modo errato.

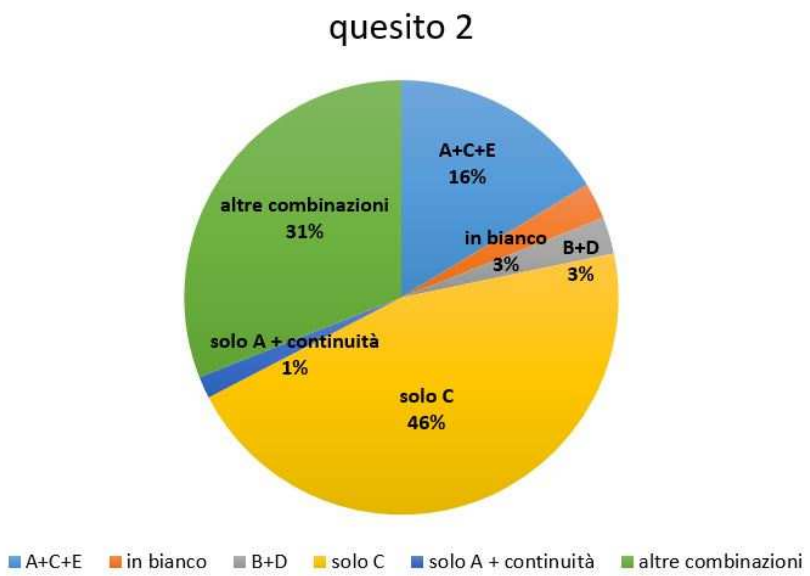


Figura 3.13: *Risposte quesito 2*

Come evidenziato dal grafico della Figura 3.13, possiamo osservare che i ragazzi che hanno lasciato il quesito in bianco solo una percentuale molto bassa, come d'altronde ci si poteva aspettare essendo una domanda a risposta multipla in cui non si chiedeva di motivare la risposta. Molto positivo è il fatto che la stessa percentuale (quindi 5 studenti su 184) hanno scelto la combinazione B+D, risposte entrambe errate. L'insieme delle tre risposte A+C+E è stata scelta soltanto da 30 ragazzi, contro gli 84 che hanno risposto solo l'opzione C.

Credo che il motivo riguardo alla scelta della sola opzione C sia dato dal fatto che nella funzione non compaiono delle costanti sottratte o sommate al *cosx* a differenza di A ed E, e questo può essere considerato un grave errore perché i ragazzi non riconoscono che la derivata di una costante è una funzione nulla, nonostante sia uno dei primi concetti che imparano quando si inizia a parlare di calcolo differenziale. Sono solo 3 i ragazzi su tutti i 184 a cui è stato somministrato il test (pari a poco più dell'1%) che hanno riconosciuto che solo la A è corretta poiché è continua, Figura 3.14.

2) Data la funzione $f(x) = |sen\, x|,\ \ x \in [0;\ 2\pi]$,
indica tra le seguenti funzioni quali sono primitive di f nell'intervallo $[0;\ 2\pi]$:

X $F(x) = \begin{cases} -cosx & se\ 0 \le x \le \pi \\ cosx + 2 & se\ \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

B. $F(x) = |\cos x|,\ \ x \in [0;\ 2\pi]$

NO X $F(x) = \begin{cases} -cosx & se\ 0 \le x \le \pi \\ cosx & se\ \pi < x \le 2\pi \end{cases}$ (discontinua in π)

D. $F(x) = -|\cos x|,\ \ x \in [0;\ 2\pi]$

E. $F(x) = \begin{cases} 1 - cosx & se\ 0 \le x \le \pi \\ cosx & se\ \pi < x \le 2\pi \end{cases}$ (discontinua in π)

Figura 3.14: *Risposta corretta quesito 2*

3.3 Quesito 3

Il terzo quesito chiede agli studenti di trovare una funzione, di cui si conosce la derivata, che verifichi un'uguaglianza:

> Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile, tale che $f'(x) = 3x$, allora si può scrivere:
>
> **A.** $\int xf(x)dx \;=\; f^2(x) + c$
>
> **B.** $\int 3xf^2(x)dx \;=\; f^3(x) + c$
>
> **C.** $\int 2xf(x)dx \;=\; 3f^2(x) + c$
>
> **D.** $\int xf^2(x)dx \;=\; \frac{1}{9}f^3(x) + c$
>
> **E.** $\int 6xf^5(x)dx \;=\; f^6(x) + c$
>
> Giustifica la tua risposta.

La risposte a questo quesito sono state classificate come:

- *in bianco*;
- *errate*;
- *corrette*, che in base alle giustificazioni sono state classificate come:
  - *senza motivazione* indicano le risposte degli studenti che hanno crocettato la risposta D (quella giusta) ma non hanno motivato la loro scelta;
  - *motivazione errata*;
  - *motivazione corretta* le risposte degli studenti che derivando $\dfrac{1}{9}f^3(x)$ hanno osservato che si ottiene proprio
  $$\frac{1}{9} \cdot 3f^2(x) \cdot f'(x) \;=\; \frac{1}{9} \cdot 3f^2(x) \cdot 3x \;=\; xf^2(x);$$
  - *si integra la derivata* i ragazzi che hanno motivato la risposta D integrando $f'(x) = 3x$ con $c = 0$ e hanno sostituito la $f(x)$ ottenuta nelle varie opzioni fino ad ottenere l'uguaglianza esatta.

Sono stati 141 i ragazzi che hanno risposto in modo esatto a questo quesito, 24 quelli che non hanno risposto correttamente scegliendo quasi tutti l'opzione B e i 19 ragazzi che hanno lasciato la risposta in bianco, come riportato nel grafico della Figura 3.15, è quindi un risultato molto positivo.

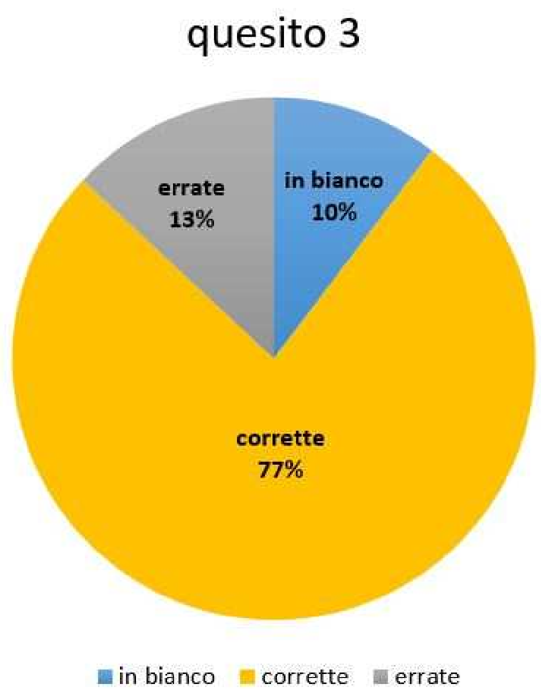
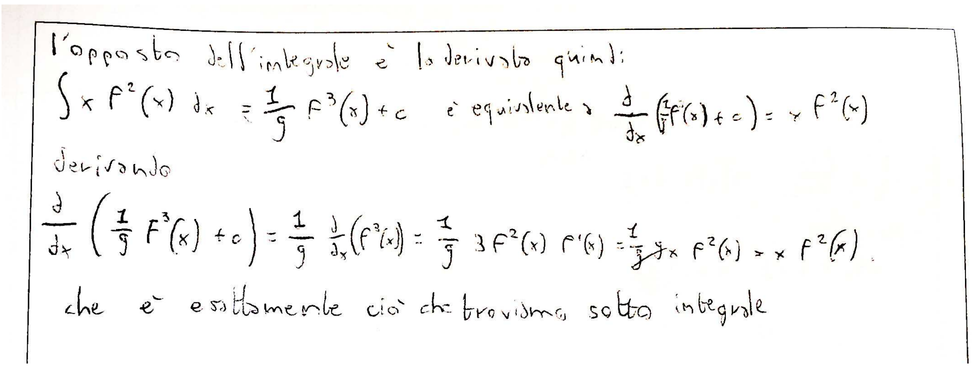


Figura 3.15: *Risposte quesito 3*

Per quanto riguarda le giustificazioni delle risposte, sono quasi il triplo i ragazzi che hanno motivato la loro scelta integrando $f'(x)$ e *procedendo per tentativi*, come alcuni hanno scritto, rispetto a quelli che sono partiti dall'uguaglianza; è sicuramente un ragionamento più sicuro per arrivare alla risposta corretta poiché si sostituisce fino ad ottenere un'identità, ma risulta un procedimento molto lungo e anche non troppo rigoroso perché porre $c = 0$ è una scelta del tutto arbitraria, Figure 3.16, 3.17, 3.18.

Figura 3.16: *Motivazioni Risposte quesito 3*



l'opposto dell'integrale è la derivata quindi:

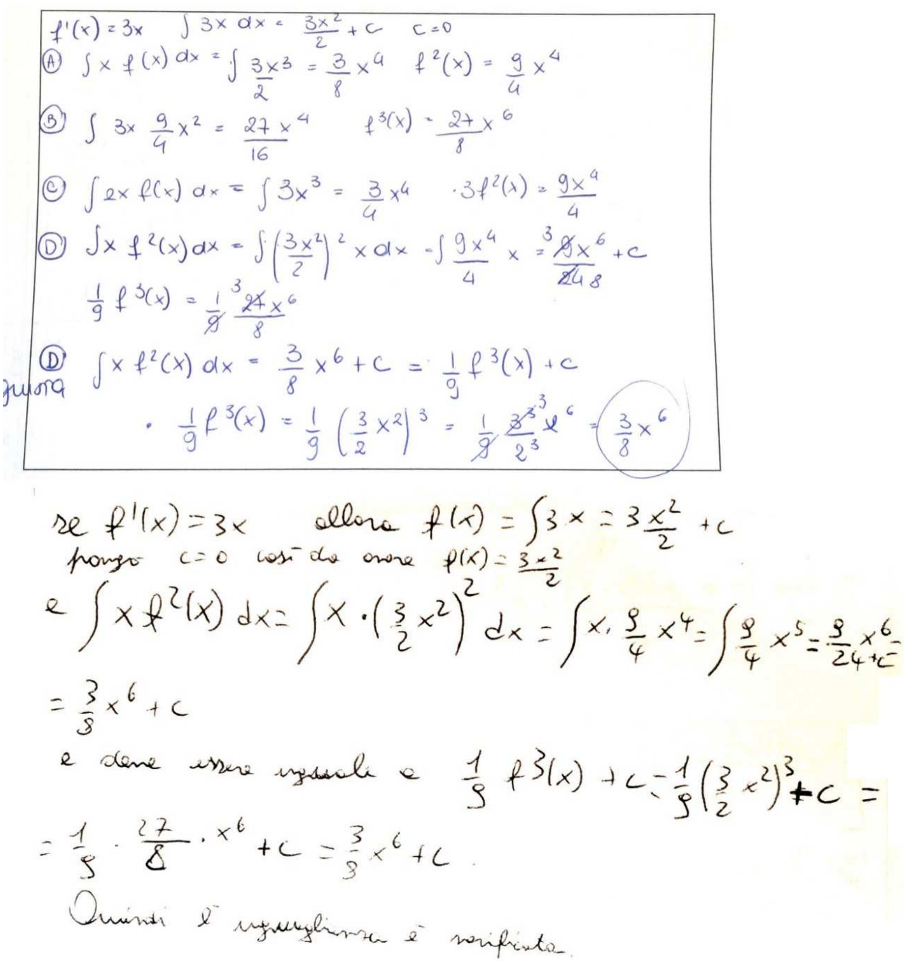
$\int x f^2(x)\,dx = \frac{1}{9} f^3(x) + c$ è equivalente a $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{9}f^3(x)+c\right) = x f^2(x)$

derivando

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{9}f^3(x)+c\right) = \frac{1}{9}\frac{d}{dx}(f^3(x)) = \frac{1}{9}3f^2(x)\,f'(x) = \frac{1}{\cancel{9}}\cancel{9}x\,f^2(x) = x\,f^2(x)$$

che è esattamente ciò che troviamo sotto integrale

Figura 3.17: *Esempio di chi è partito correttamente dall'uguaglianza*



$f'(x) = 3x \qquad \int 3x\, dx = \frac{3x^2}{2} + c \qquad c = 0$

(A) $\int x\, f(x)\, dx = \int \frac{3x^3}{2} = \frac{3}{8}x^4 \qquad f^2(x) = \frac{9}{4}x^4$

(B) $\int 3x\, \frac{9}{4}x^2 = \frac{27}{16}x^4 \qquad f^3(x) = \frac{27}{8}x^6$

(C) $\int 2x\, f(x)\, dx = \int 3x^3 = \frac{3}{4}x^4 \qquad \cdot 3f^2(x) = \frac{9x^4}{4}$

(D) $\int x\, f^2(x) dx = \int \left(\frac{3x^2}{2}\right)^2 x\, dx = \int \frac{9x^4}{4}\, x = \frac{\cancel{9}^{3} x^6}{\cancel{24}\,8} + c$

$\frac{1}{9} f^3(x) = \frac{1}{\cancel{9}} \frac{\cancel{27}^{3} x^6}{8}$

giusta (D) $\int x\, f^2(x)\, dx = \frac{3}{8}x^6 + c = \frac{1}{9} f^3(x) + c$

$\cdot\ \frac{1}{9} f^3(x) = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 = \frac{1}{\cancel{9}} \frac{\cancel{3^3}}{2^3} x^6 = \frac{3}{8}x^6$

se $f'(x) = 3x$ allora $f(x) = \int 3x = 3\frac{x^2}{2} + c$

pongo $c = 0$ così da avere $f(x) = \frac{3x^2}{2}$

e $\int x\, f^2(x)\, dx = \int x \cdot \left(\frac{3}{2}x^2\right)^2 dx = \int x \cdot \frac{9}{4}x^4 = \int \frac{9}{4}x^5 = \frac{9}{24}x^6 + c =$

$= \frac{3}{8}x^6 + c$

e deve essere uguale a $\frac{1}{9} f^3(x) + c = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}x^2\right)^3 + c =$

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{27}{8} \cdot x^6 + c = \frac{3}{8}x^6 + c$.

Quindi l'uguaglianza è verificata.

Figura 3.18: *Due esempi di chi ha integrato $f'(x)$ e posto $c = 0$*

Di seguito si riportano gli svolgimenti di tre esercizi: i primi due (Figura 3.19) contengono gravi errori nella giustificazione della risposta, nonostante fosse quella giusta per entrambi. Il primo studente, invece di integrare, ha derivato $3x$, ottenendo come funzione $f(x) = 3$, che ha poi sostituito in tutte le opzioni date ottenendo come risultato dei valori per la x. Probabilmente avrà scelto come risposta la D poiché x risulta $\frac{1}{9}$ che è lo stesso coefficiente che si trova a destra nell'uguaglianza.
L'altro studente integra correttamente $3x$ ma non sostituisce la funzione ottenuta ma la derivata, per poi eguagliare nell'ultimo passaggio 9 con $\dfrac{1}{9}$ e x con $f(x)$. Il terzo esercizio (Figura 3.20) riguarda una motivazione che solo pochi studenti hanno dato: partendo infatti da $\int xf^2(x)dx$ hanno cercato di ricondursi alla forma $\int f'(x)f^n(x)dx$.

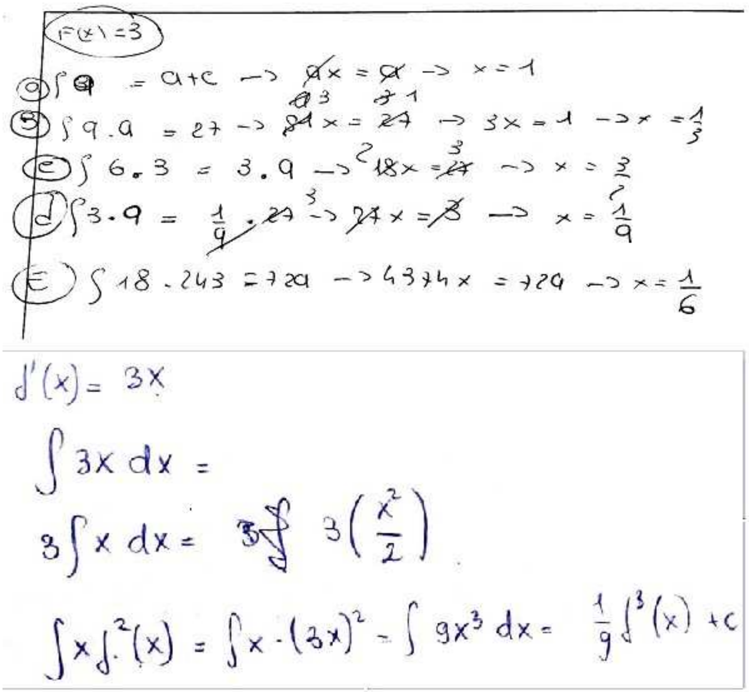


Figura 3.19: *Errori nella giustificazione risposta D*

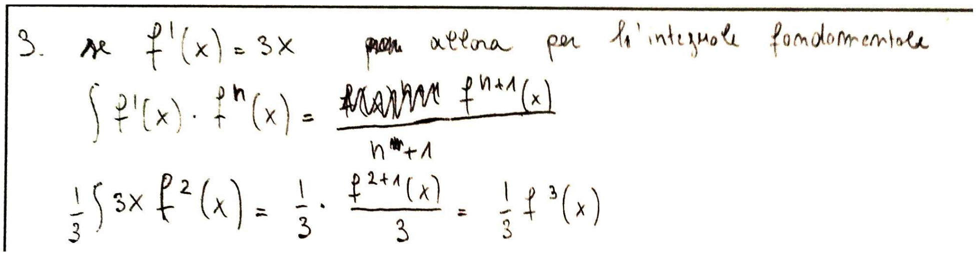


Figura 3.20: *Giustificazione corretta*

3.4 Quesito 4

Il quesito 4 chiede di:

$$\text{Calcolare } \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x sent^3 dt}{x^4}.$$

In questo esercizio viene chiesto ai ragazzi di riconoscere una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ che si risolve applicando De l'Hospital, quindi di utilizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale per il numeratore, poi riconoscere il limite notevole $lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x}$. È quindi un quesito che collega molti argomenti dell'ultimo anno delle superiori, in particolare il calcolo integrale con la teoria dei limiti che si studia all'inizio dell'anno scolastico. Le risposte del quesito sono state classificate nel seguente modo:

- *in bianco*;
- *corrette*;
- *errate*, suddivise in:
  - *calcolo dell'integrale* per chi ha calcolato a parte l'integrale $\int_0^x sent^3 dt$;
  - *infinito come risultato* per chi ha ragionato nel seguente modo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x sent^3 dt}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx^3}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx^3}{x^3} \cdot \frac{1}{x} = \infty;$$

- *De l'Hospital più volte* per chi ha applicato De l'Hospital più di una volta in modo errato;
- *errori vari.*

Complessivamente i risultati di questo quesito sono soddisfacenti, infatti sono stati 95 gli studenti che hanno risposto in modo corretto: 84 hanno riconosciuto il limite notevole mentre gli altri 11 hanno applicato il teorema di De l'Hospital due volte, 41 i ragazzi che hanno lasciato in bianco e 48 quelli che hanno sbagliato, come mostrato nel grafico della Figura 3.21.

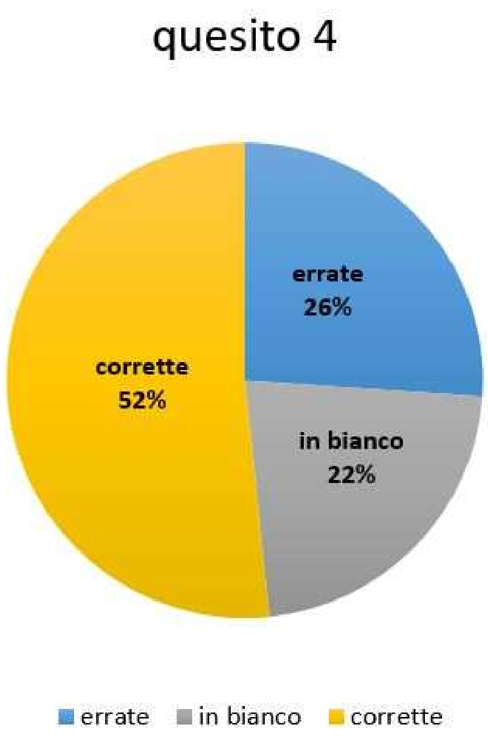


Figura 3.21: *Risposte quesito 4*

Gli errori invece hanno dato i seguenti risultati:

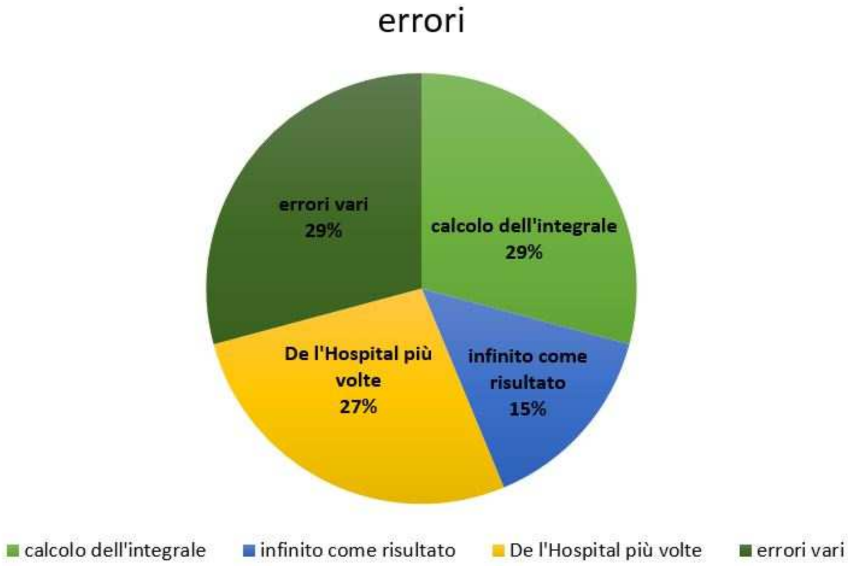


Figura 3.22: *Errori quesito 4*

in 13 hanno applicato il teorema di De l'Hospital più di una volta ma sbagliando (Figura 3.23), in 14 hanno calcolato a parte l'integrale (Figura 3.24), in 14 hanno commesso errori vari e in 7 ragazzi hanno dato come risultato ∞ (Figura 3.25), riportiamo nelle seguenti figure diverse tipologie di errori commessi.

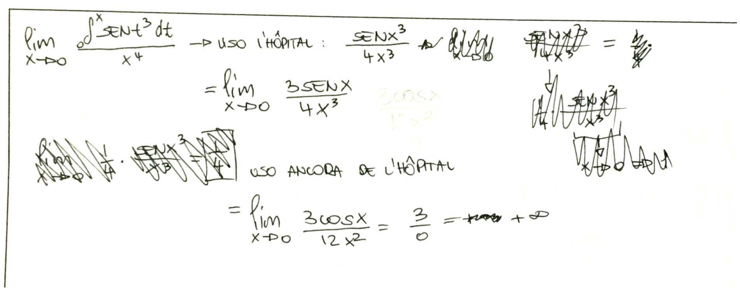


Figura 3.23: *Teorema di De l'Hospital applicato due volte ma in modo sbagliato*

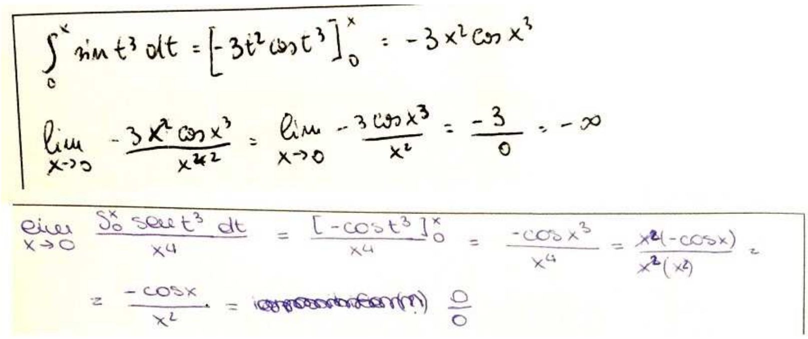


Figura 3.24: *Calcolo errato dell'integrale*

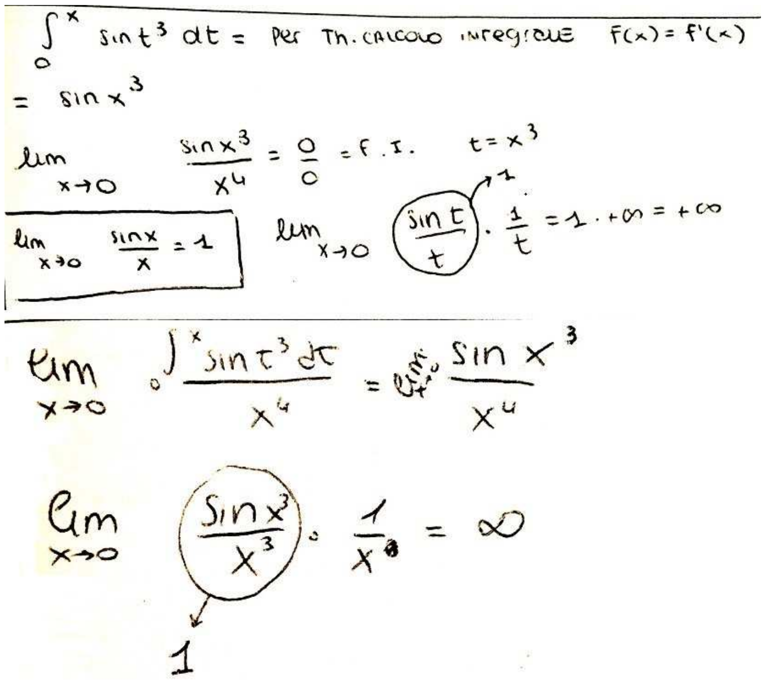
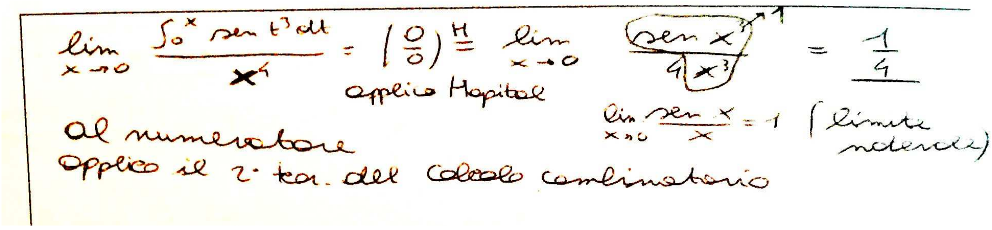


Figura 3.25: *Errore: infinito come risultato*

Concludiamo l'analisi del quarto quesito riportando le risposte di due studenti: nella prima (Figura 3.26) l'esercizio viene svolto in modo perfetto ma nell'ultima frase viene riportata la seguente motivazione *al numeratore applico il secondo teorema del calcolo combinatorio*, si tratta probabilmente di un errore di distrazione dove il ragazzo ha confuso i nomi dei teoremi, nella seconda l'alunno continua ad utilizzare in modo molto ingenuo il teorema di De l'Hospital fino ad ottenere (con calcoli errati) un risultato finito $\frac{0}{24}$ che scrive uguale ad ∞ (Figura 3.27).

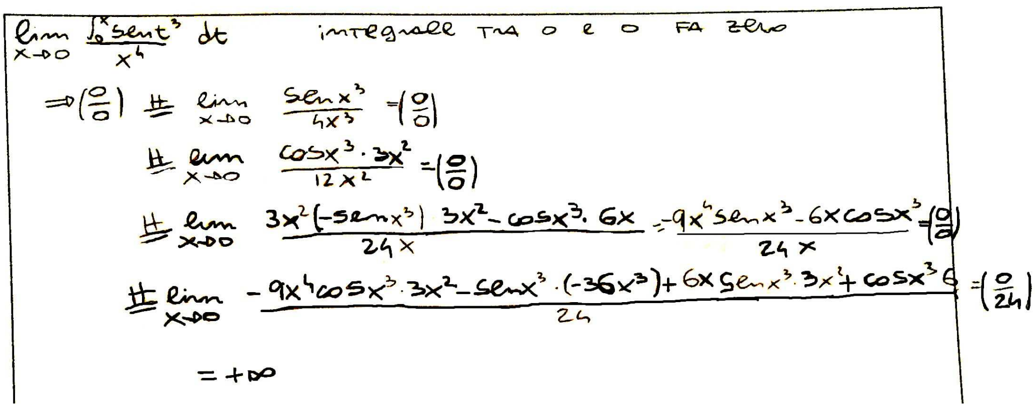

$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 dt}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$

applico Hopital

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (limite notevole)

al numeratore applico il 2° teor. del calcolo combinatorio

Figura 3.26: *Errore: si applica il secondo teorema del calcolo combinatorio*


$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 dt}{x^4}$ integrale tra 0 e 0 fa zero

$\Rightarrow \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^3 \cdot 3x^2}{12x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(-\operatorname{sen} x^3)\, 3x^2 - \cos x^3 \cdot 6x}{24x} = \frac{-9x^4 \operatorname{sen} x^3 - 6x\cos x^3}{24x} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-9x^4 \cos x^3 \cdot 3x^2 - \operatorname{sen} x^3 \cdot (-36x^3) + 6x \operatorname{sen} x^3 \cdot 3x^2 + \cos x^3\, 6}{24} = \left(\frac{0}{24}\right)$

$= +\infty$

Figura 3.27: *Errore: si applica il teorema di De l'Hospital più volte*

3.5 Quesito 5

> Calcola la derivata, rispetto a x, della funzione $f(x)$ tale che:
> $f(x) = \int_x^{x+2} ln^2 t \ dt$, con $x > 0$.

In questo esercizio si richiede ai ragazzi la conoscenza del concetto di funzione integrale, del teorema fondamentale del calcolo integrale e delle proprietà dei logaritmi.
Le risposte sono state classificate nel seguente modo:

- *in bianco*;
- *corrette*;
- *errate*, suddivise in:
  - *calcolo integrale e derivata* per identificare chi ha svolto questo esercizio calcolando l'integrale e poi facendo la derivata della funzione così ottenuta;
  - *errori nello svolgimento* riferito a chi ha svolto l'esercizio impostando bene il problema ma ha fatto degli errori nello svolgimento;
  - *proprietà dei logaritmi* per identificare chi ha svolto bene il problema ma ha sbagliato negli ultimi passaggi nel riconoscere le proprietà dei logaritmi giuste da applicare;
  - *impostazione sbagliata* riferito a chi ha svolto l'esercizio in modo errato dall'inizio.

Il quesito 5, insieme al quesito 1, non ha dato risultati molto positivi. Come si può vedere nel grafico della Figura 3.28, quasi la metà dei ragazzi ha risposto in modo errato, una percentuale abbastanza alta (il 32%, cioè 58 studenti su 184) ha lasciato il quesito in bianco, e solo il 25% (46 su 184) ha svolto l'esercizio in modo corretto.

Tra quest'ultimi solo in 26 hanno svolto un ragionamento preciso e completo:
hanno cercato un punto x_0 tale che $x < x_0 < x + 2$ e scritto

$$f(x) \ = \ \int_x^{x+2} ln^2 t dt \ = \ \int_x^{x_0} ln^2 t dt \ + \ \int_{x_0}^{x+2} ln^2 t dt \ =$$

$$= \ -\int_{x_0}^{x} ln^2 t dt \ + \ \int_{x_0}^{x+2} ln^2 t dt$$

poi per la definizione di funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} ln^2 t dt \qquad f(x) \ = \ F(x+2) - F(x);$$

si deriva membro a membro per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$f'(x) \ = \ F'(x+2) \ - \ F'(x) \ = \ ln^2(x+2) \ - \ ln^2(x) \ =$$

$$= \ [ln(x+2) + ln(x)] \ \cdot \ [ln(x+2) - ln(x)] \ =$$

$$= \ ln[(x+2) \cdot x] \ \cdot \ ln[\frac{x+2}{x}],$$

gli altri 20 hanno risposto in modo esatto ma la motivazione era incompleta, ovvero hanno citato il teorema del calcolo integrale e scritto che la derivata era proprio $ln^2(x+2) \ - \ ln^2(x)$.

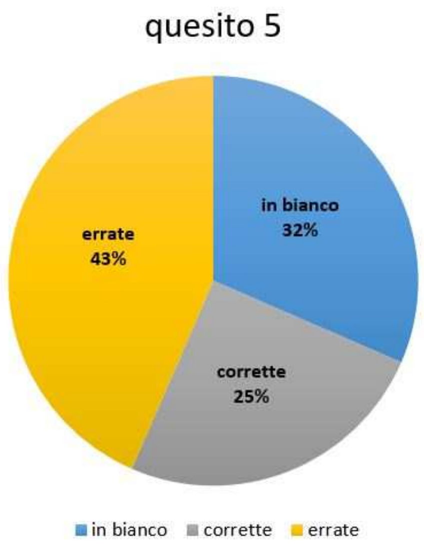


Figura 3.28: *Risposte quesito 5*

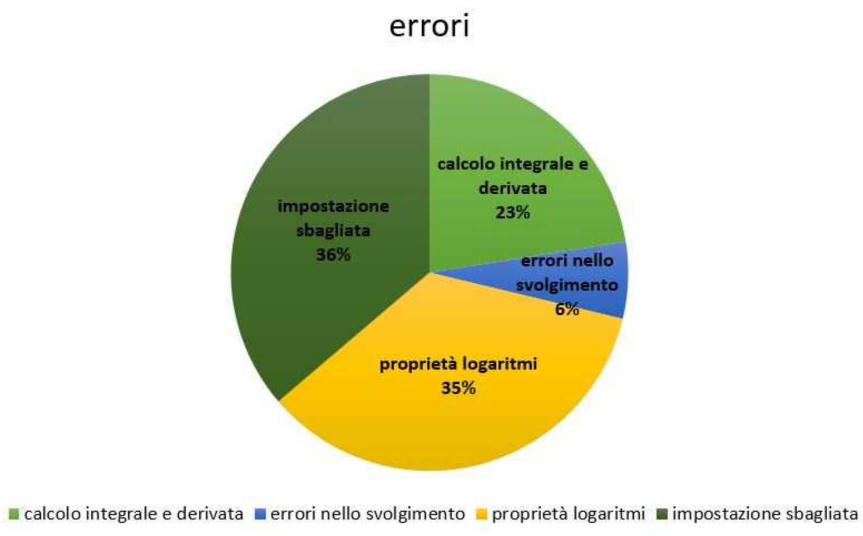


Figura 3.29: *Errori quesito 5*

Dalla Figura 3.29, possiamo osservare che i due errori commessi con maggior frequenza sono stati *impostazione sbagliata* e *proprietà dei logaritmi.* Chi ha sbagliato nelle ultime uguaglianze le proprietà dei logaritmi, ha lasciato intuire di sapere risolvere il problema, quindi di conoscere la funzione integrale e il teorema fondamentale del calcolo integrale; effettivamente la differenza dei quadrati di due logaritmi poteva trarre in inganno, e in molti l'hanno infatti vista come il quoziente degli argomenti del logaritmo. I tre esempi in Figura 3.30 mostrano una scarsa conoscenza riguardo le proprietà dell'argomento.

Chi invece ha impostato male il problema fin dall'inizio, ha dimostrato di non conoscere o comunque di non saper applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale; come ad esempio la motivazione *la derivata della funzione integrale è la funzione integranda calcolata nell'estremo superiore, moltiplicata per la derivata dell'estremo superiore* che si trova in figura 3.31, dove non si rileva che nel caso attuale è variabile anche il primo estremo dell'integrale. Una percentuale non indifferente ha invece calcolato a parte l'integrale e poi ha derivato il risultato ottenuto, ciò ci fa intuire che per questi studenti non è chiaro il legame tra derivata e integrale, ma soprattutto il concetto di funzione integrale.

Inoltre, nel calcolo a parte dell'integrale (chi l'ha fatto con il metodo di sostituzione, chi per parti, ecc...) sono stati commessi errori abbastanza gravi come mostrato nelle Figure 3.32, 3.33, 3.34, 3.35.

$$f(x) = \int_x^a \ln^2 t \, dt + \int_a^{x+2} \ln^2 t \, dt =$$

$$= -\int_a^x \ln^2 t \, dt + \int_a^{x+2} \ln^2 t \, dt =$$

$$= \ln^2(x+2) - \ln^2 x = \ln^2\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

la derivata di un integrale annulla l'integrale stesso.

$$* \left[\ln^2(x+e) - \ln^2 x\right] = \ln^2 x \cdot \ln^2 e - \ln^2 x = \ln^2 x\left(\ln^2 e - \cancel{\ln} 1\right)$$

$*$

$\bullet\ ? = f'(x)$

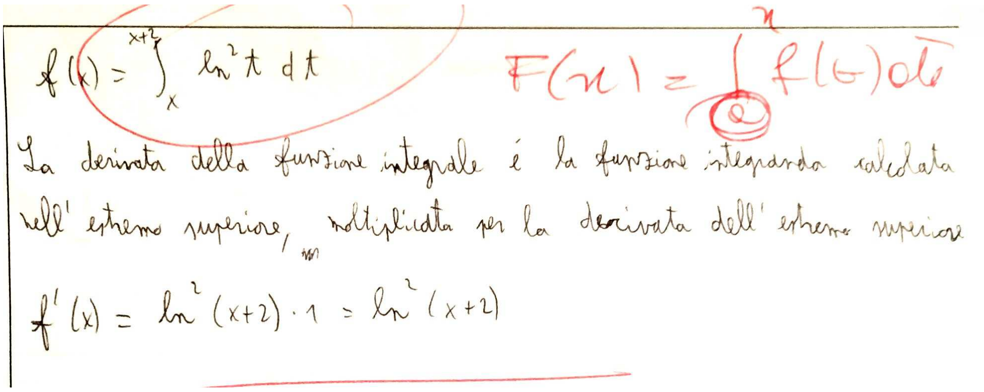
$\bullet\ f(x) = \int_x^{x+2} \ln^2 t \, dt \xrightarrow{\text{con}} x > 0$

$$\bullet\ \left[\ln^2 t\right]_x^{x+2} = \ln^2(x+2) - \ln^2(x) =$$

$$= \ln^2 \cancel{x} \cdot \ln^2 2 - \cancel{\ln^2 x} = \ln^2 2 - 1 =$$

$$= e^4 - 1e^0 = e^4 - 1$$

Figura 3.30: *Errori riguardo le proprietà dei logaritmi*



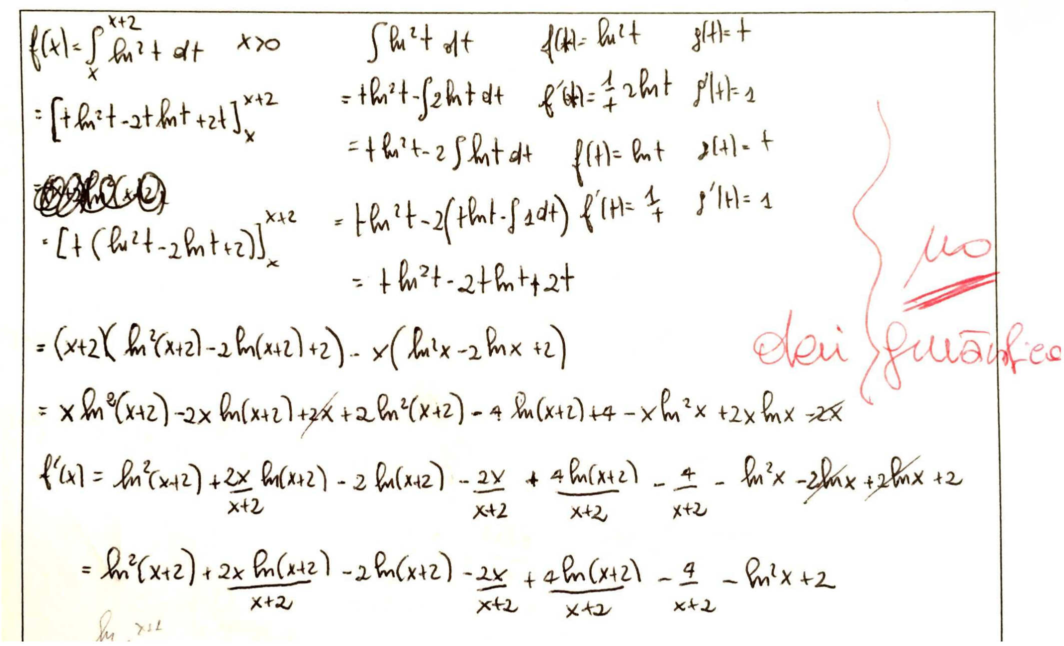
$f(x) = \int_x^{x+2} \ln^2 t \, dt$

$F(x) = \int^x f(t)\,dt$

La derivata della funzione integrale è la funzione integranda calcolata nell'estremo superiore, moltiplicata per la derivata dell'estremo superiore

$f'(x) = \ln^2(x+2)\cdot 1 = \ln^2(x+2)$

Figura 3.31: *Errore impostazione sbagliata*



$f(x) = \int_x^{x+2} \ln^2 t \, dt \quad x>0$

$\int \ln^2 t \, dt \quad f(t)=\ln^2 t \quad g(t)=t$

$= t\ln^2 t - \int 2\ln t \, dt \quad f'(t)=\frac{1}{t}2\ln t \quad g'(t)=1$

$= t\ln^2 t - 2\int \ln t \, dt \quad f(t)=\ln t \quad g(t)=t$

$= t\ln^2 t - 2(t\ln t - \int 1 \, dt) \quad f'(t)=\frac{1}{t} \quad g'(t)=1$

$= t\ln^2 t - 2t\ln t + 2t$

$= [t\ln^2 t - 2t\ln t + 2t]_x^{x+2}$

$= [t(\ln^2 t - 2\ln t + 2)]_x^{x+2}$

$= (x+2)(\ln^2(x+2) - 2\ln(x+2) + 2) - x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$

$= x\ln^2(x+2) - 2x\ln(x+2) + \cancel{2x} + 2\ln^2(x+2) - 4\ln(x+2) + 4 - x\ln^2 x + 2x\ln x - \cancel{2x}$

$f'(x) = \ln^2(x+2) + \frac{2x}{x+2}\ln(x+2) - 2\ln(x+2) - \frac{2x}{x+2} + \frac{4\ln(x+2)}{x+2} - \frac{4}{x+2} - \ln^2 x - \cancel{2\ln x} + \cancel{2\ln x} + 2$

$= \ln^2(x+2) + \frac{2x\ln(x+2)}{x+2} - 2\ln(x+2) - \frac{2x}{x+2} + \frac{4\ln(x+2)}{x+2} - \frac{4}{x+2} - \ln^2 x + 2$

Figura 3.32: *Lo studente cerca di integrare per parti e poi derivare la funzione ottenuta*

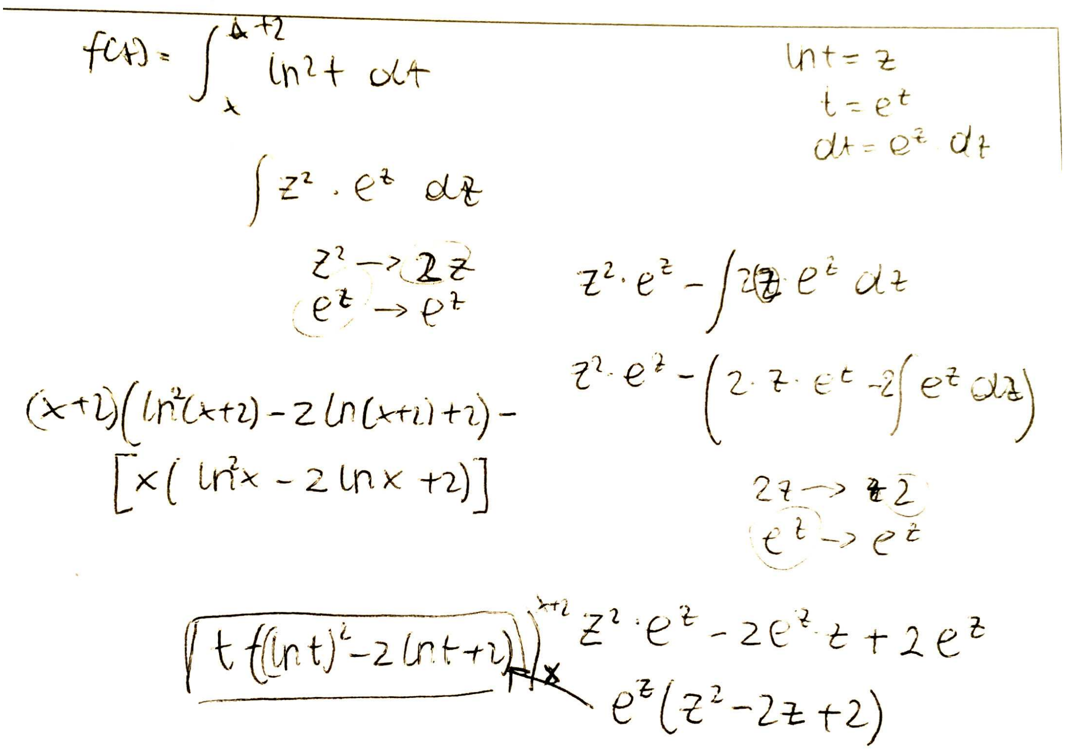


Figura 3.33: *Lo studente cerca di integrare applicando una sostituzione*

$$f(x)=\int_x^{x+2}\ln^2 t\,dt \qquad , x>0$$

$$f(x)=\int_x^{2}\ln^2 t\,dt+\int_2^{x+2}\ln^2 t\,dt=$$

$$=\int_2^{x+2}\ln^2 t\,dt-\int_2^{x}\ln^2 t\,dt= \qquad \int \ln^2 t\,dt=\frac{2}{t}$$

$$=\left(\frac{2}{x+2}-1\right)-\left(\frac{2}{x}-1\right)=$$

$$=\frac{2}{x+2}-\cancel{1}-\frac{2}{x}+\cancel{1}=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x}=-\frac{2}{x(x+2)}+C$$

$$f'(x)=\frac{+2(x+2+x)}{(x(x+2))^2}=\frac{4(x+1)}{(x(x+2))^2}$$

Figura 3.34: *Qui lo studente imposta la risoluzione in modo non del tutto sbagliato: individua 2 come punto compreso tra x e $x+2$ e divide l'integrale. Il problema sta nell'affermare che $\int ln^2tdt = \dfrac{2}{t}$ e risolvere i due integrali secondo questo risultato.*

$$\int \ln^2 t=\frac{\ln^3 t}{3}$$

$$f(x)=\left[\frac{\ln^3 t}{3}\right]_x^{x+2}=\underbrace{\frac{\ln^3(x+2)}{3}}-\frac{\ln^3 x}{3}=\underbrace{\frac{\cancel{\ln^3 x}}{3}+\frac{\ln^3 2}{3}}-\frac{\cancel{\ln^3 x}}{3}$$

$$f(x)=\frac{\ln^3 2}{3} \qquad f'=0$$

Figura 3.35: *In questa risoluzione lo studente risolve l'integrale del quadrato di un logaritmo come se fosse x^2, poi valuta la funzione ottenuta negli estremi e separa la somma che si trova nell'argomento del cubo del logaritmo. Ottiene così una funzione costante la cui derivata è zero.*

3.6 Quesito 6

Il sesto quesito è tratto da un esame di stato del liceo scientifico - corso sperimentale P.N.I. del 2003:

> Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $senx$
> e che $f'(0) = 1$.
> Quanto vale $f(\frac{\pi}{2}) - f(0)$?

quello che viene richiesto ai ragazzi, oltre a saper integrare delle funzioni elementari, è ricordarsi delle costanti di integrazione e di saperle calcolare dato che il testo fornisce loro il valore della derivata in un punto.
Le risposte a questo quesito sono state classificate come:

- *in bianco*;
- *corrette*;
- *errate*, a loro volta suddivise in:
  - *no costanti*, per indicare chi ha svolto l'esercizio non prendendo in considerazione le costanti di integrazione;
  - *errori vari.*

Come si può vedere dal grafico della Figura 3.36 la metà dei ragazzi (97 su 184) ha risposto in modo corretto al quesito, in 18 (circa il 10%) hanno lasciato il quesito in bianco e in 69 (circa il 37%) lo ha svolto in modo sbagliato.

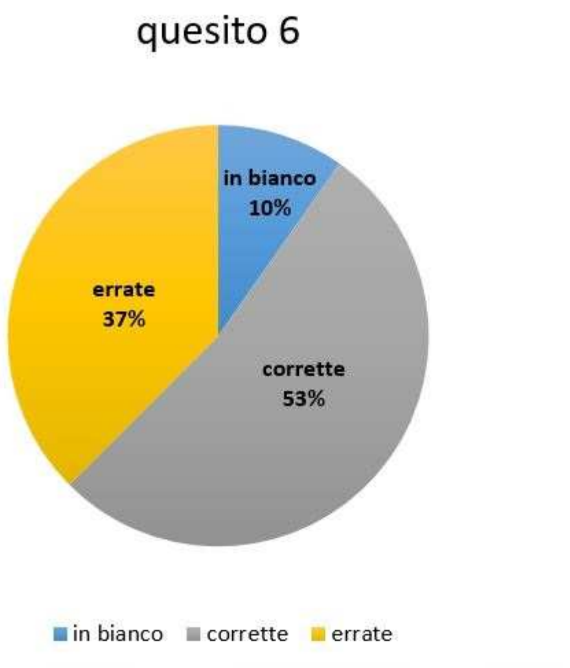


Figura 3.36: *Risposte quesito 6*

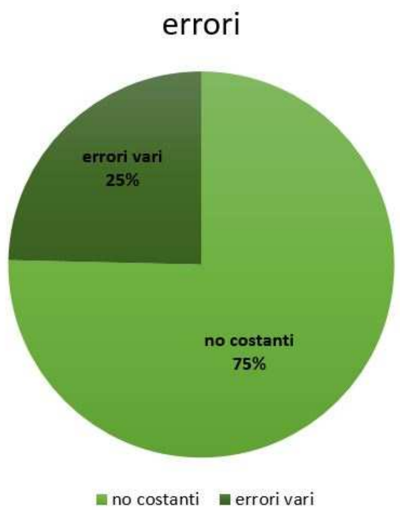
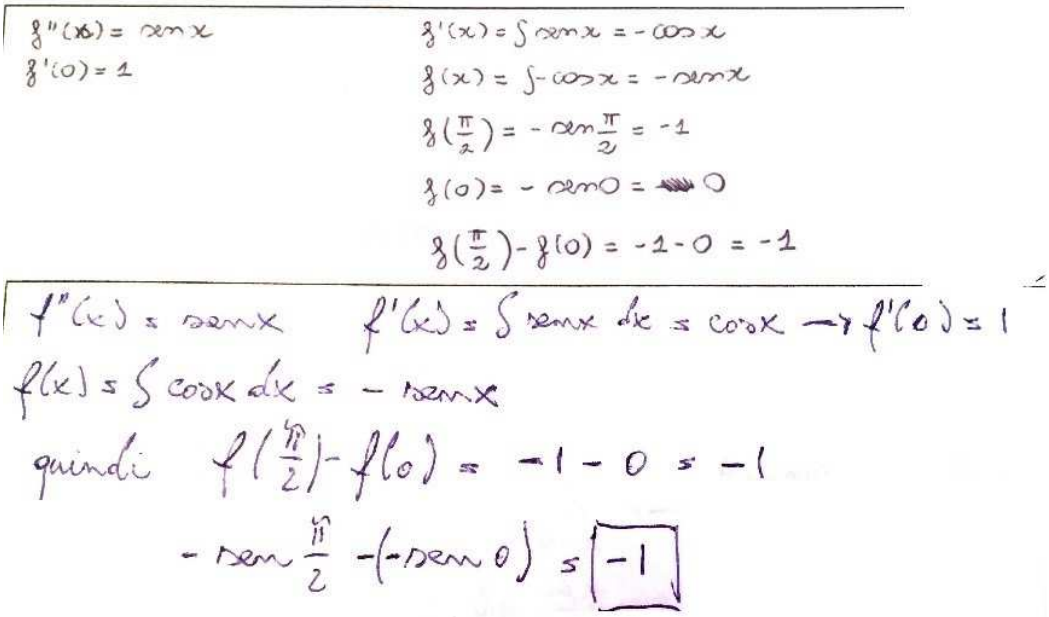


Figura 3.37: *Errori quesito 6*

Tra gli errori (Figura 3.37), quello che abbiamo chiamato *no costanti* è stato in assoluto quello più frequente: il 75% dei ragazzi che ha risposto in modo errato lo ha fatto perchè nella prima integrazione non ha considerato la costante nell'espressione della primitiva, come gli esempi della Figura 3.38.


$f''(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(0) = 1$

$f'(x) = \int \operatorname{sen} x = -\cos x$

$f(x) = \int -\cos x = -\operatorname{sen} x$

$f(\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1$

$f(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$

$f(\frac{\pi}{2}) - f(0) = -1 - 0 = -1$

$f''(x) = \operatorname{sen} x \quad f'(x) = \int \operatorname{sen} x \, dx = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$

$f(x) = \int \cos x \, dx = -\operatorname{sen} x$

quindi $f(\frac{\pi}{2}) - f(0) = -1 - 0 = -1$

$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - (-\operatorname{sen} 0) = \boxed{-1}$

Figura 3.38: *Errori: non si considerano le costanti di integrazione*

Riportiamo di seguito alcuni errori che sono stati fatti durante lo svolgimento dell'esercizio nelle Figure 3.39, 3.40, 3.41, 3.42.

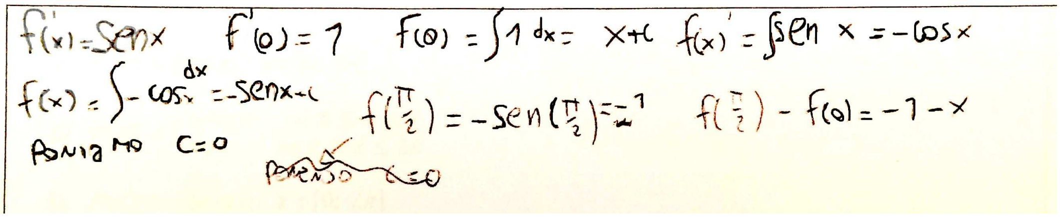


Figura 3.39: *Lo studente considera la costante di integrazione solo dopo aver calcolato il secondo integrale e pone arbitrariamente* $c = 0$

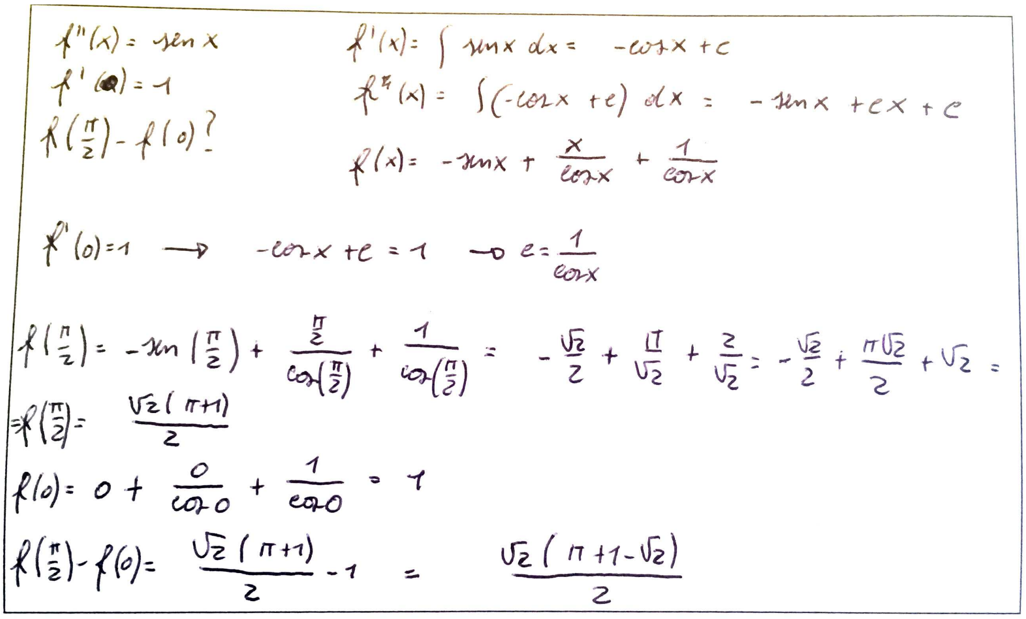
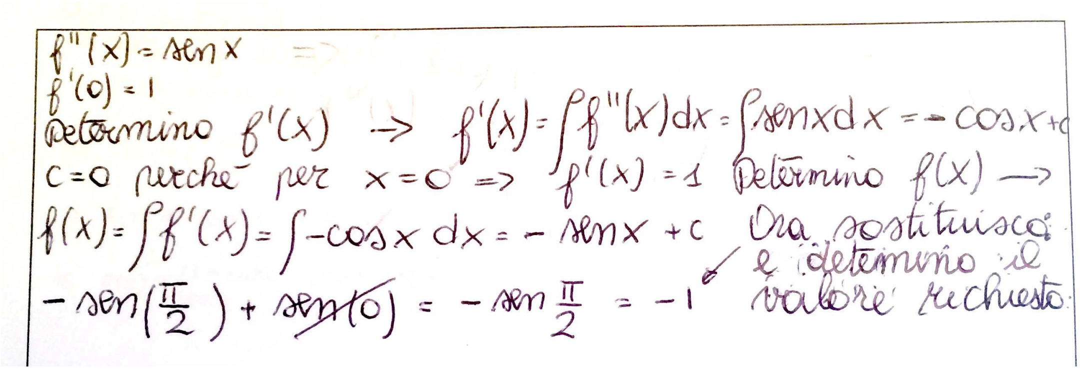


Figura 3.40: *In questa risposta lo studente tiene conto della costante nel calcolo di tutti e due gli integrali, sbaglia però nel valutarla perchè non tiene conto del fatto che* $x = 0$



$f''(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(0) = 1$

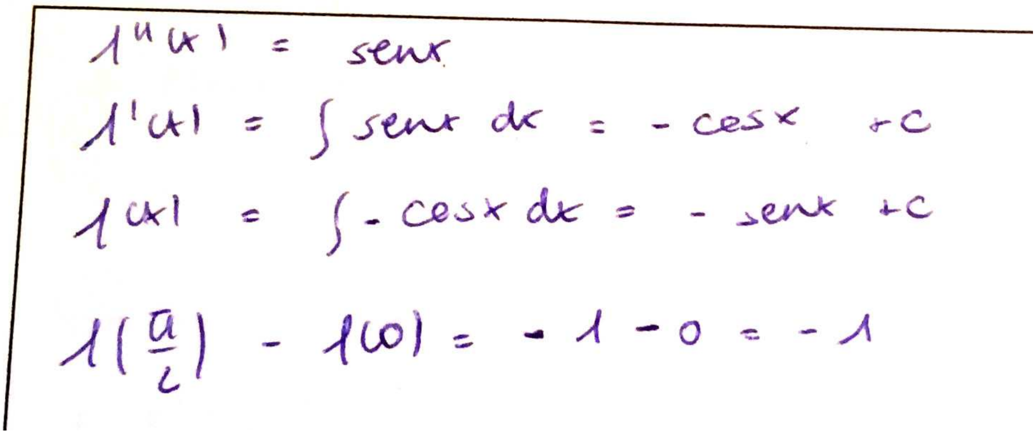
Determino $f'(x) \to f'(x) = \int f''(x)dx = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$

$c = 0$ perché per $x = 0 \Rightarrow f'(x) = 1$ Determino $f(x) \to$

$f(x) = \int f'(x) = \int -\cos x \, dx = -\operatorname{sen} x + c$ Ora sostituisco e determino il valore richiesto

$-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cancel{\operatorname{sen}(0)} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1$

Figura 3.41: *Anche in questo caso lo studente fa un errore nel valutare la costante che pone uguale a zero per una motivazione errata*



$f''(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$

$f(x) = \int -\cos x \, dx = -\operatorname{sen} x + c$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = -1 - 0 = -1$

Figura 3.42: *Lo studente fa capire che ha presente il fatto della presenza della costante di integrazione, che aggiunge in tutti e due gli integrali, l'errore sta nel non considerarle affatto quando valuta le funzioni nei punti*

3.7 Quesito 7

Sia $f(x)$ una funzione continua, di cui $F(x)$ è una primitiva.
Quale delle seguenti uguaglianze è corretta? Giustifica la tua risposta.

A. $\int e^x f(x)dx = F(x)e^x dx + \int F(x)e^x dx$

B. $\int x^2 f(x)dx = x^2 F(x) - \int 2xf(x)dx$

C. $\int f(x)cosxdx = F(x)senx - \int senxF(x)dx$

D. $\int \frac{f(x)}{x}dx = \frac{F(x)}{x} + \int \frac{F(x)}{x^2}dx$

E. $\int f(x) \cdot f(x)dx = F(x)f(x) - \int f(x)f'(x)dx$

Con l'ultimo quesito si voleva verificare la conoscenza della formula di integrazione per parti, in particolare la capacità dei ragazzi si saperla riconoscere anche quando la primitiva e la derivata sono scritte come $F(x)$ e $f(x)$.
Le risposte a questo quesito sono state classificate come:

- *in bianco*;
- *errate*;
- *corrette*, a loro volta suddivise in :
  - *motivazione corretta* le risposte di chi ha giustificato correttamente la scelta D;
  - *senza motivazione* le risposte dei ragazzi che hanno scelto la D senza dare una motivazione;
  - *motivazione errata* le risposte dei ragazzi che hanno fatto al scelta D ma giustificandola in modo non corretto.

Come mostrato in Figura 3.43, i risultati di questo quesito sono molto positivi. Infatti la maggior parte dei ragazzi ha risposto correttamente, il 15% (28 alunni) ha lasciato la risposta in bianco, dato un pò inaspettato forse, considerando che vengono fornite cinque possibili risposte tra cui scegliere, il 23 % (43 studenti) ha risposto in modo errato, optando prevalentemente per l'opzione B e il 62% (113 studenti) ha scelto la risposta esatta. Tra quest'ultimi la maggior parte ha motivato correttamente rispetto a chi non ha giustificato (10 ragazzi) o l'ha fatto in modo sbagliato (8 ragazzi), come mostrato in Figura 3.44.

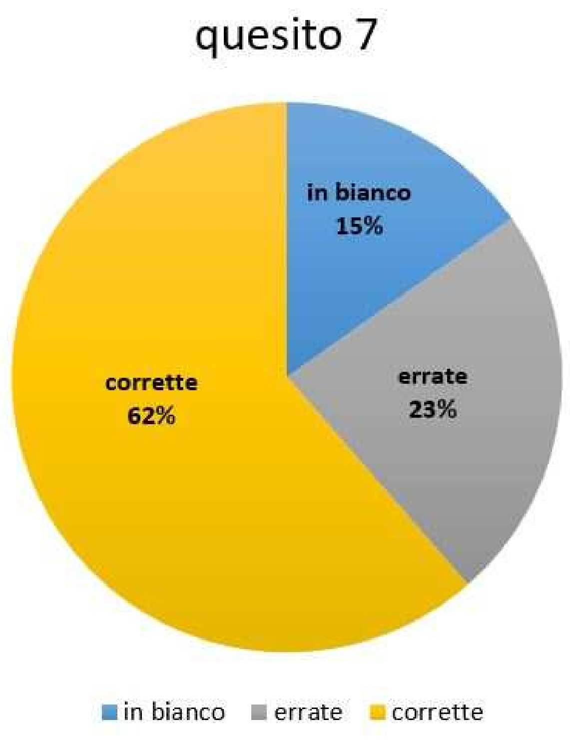


Figura 3.43: *Risposte quesito 7*

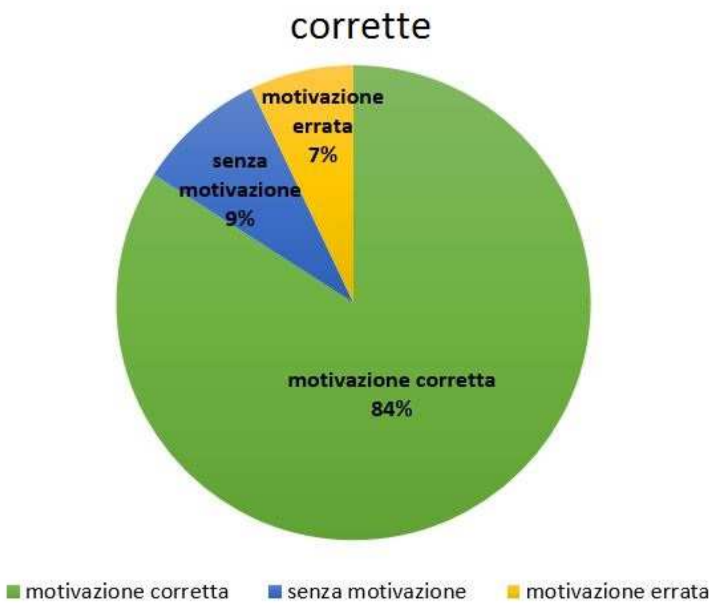
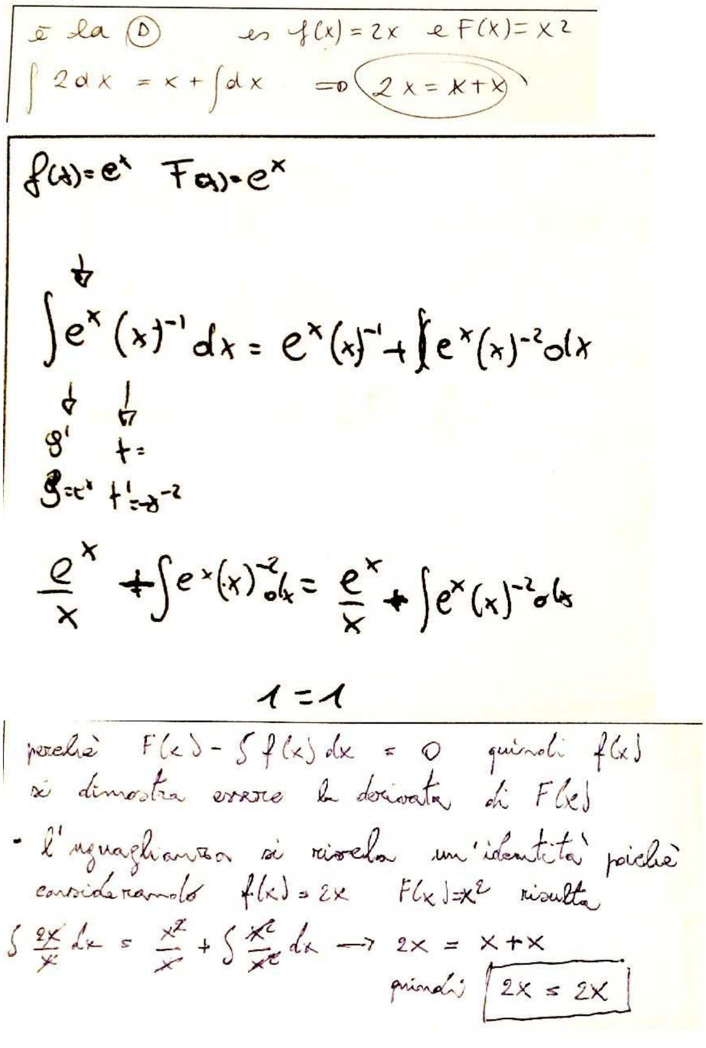


Figura 3.44: *Giustificazioni quesito 7*

La maggior parte dei ragazzi ha giustificato la risposta scrivendo *uso la formula per parti* e poi l'ha verificata sull'opzione D e un numero non indifferente di studenti, scrivendo sempre che procedeva per parti, ha verificato l'uguaglianza sostituendo ad $F(x)$ delle funzioni elementari, come e^x o x^2 (esempi in Figura 3.45).



è la (D) es $f(x)=2x$ e $F(x)=x^2$

$\int 2dx = x + \int dx \Rightarrow 2x = x+x$

$f(x)=e^x$ $F(x)=e^x$

$$\int e^x (x)^{-1} dx = e^x (x)^{-1} + \int e^x (x)^{-2} dx$$

g' $f=$

$g=e^x$ $f'=-x^{-2}$

$$\frac{e^x}{x} + \int e^x (x)^{-2} dx = \frac{e^x}{x} + \int e^x (x)^{-2} dx$$

$1=1$

perchè $F(x) - \int f(x)\,dx = 0$ quindi $f(x)$ si dimostra essere la derivata di $F(x)$

- l'uguaglianza si rivela un'identità poichè considerando $f(x)=2x$ $F(x)=x^2$ risulta

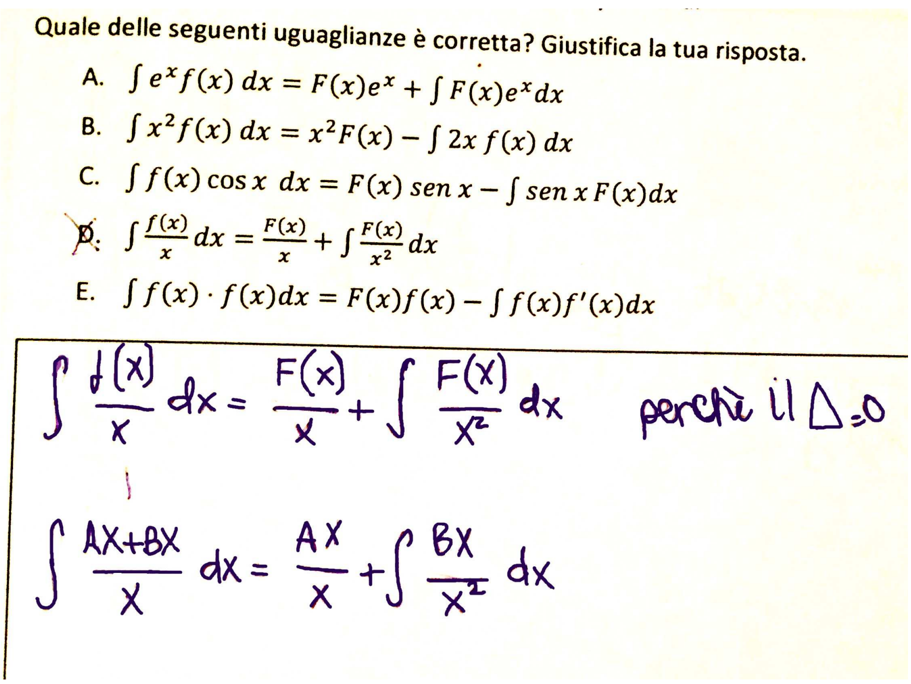
$\int \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} dx = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + \int \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} dx \longrightarrow 2x = x+x$

quindi $\boxed{2x = 2x}$

Figura 3.45: *Tre esempi di chi ha motivato la risposta sostituendo a $F(x)$ una funzione elementare e ha verificato l'uguaglianza*

Tra le risposte errate, uno studente, scegliendo per l'opzione A, scrive: *L'unica corretta è la A perché nelle altre il metodo dell'integrazione per parti non è applicato in modo corretto. La A va bene perché il metodo di integrazione è applicato correttamente*; riconosce dunque che è il metodo per parti la strada da prendere per poter risolvere il problema ma, oltre ad aver scelto la risposta sbagliata, non verifica con i calcoli se è quella giusta e nemmeno se le altre sono sbagliate.

Tra i ragazzi che hanno risposto la D ma dato una motivazione errata, possiamo osservare quella della Figura 3.46, in cui lo studente cerca di giustificare l'uguaglianza come se fosse davanti a un caso di integrazione di funzioni razionali fratte con denominatore di secondo grado e discriminante nullo. L'ultima risposta che riportiamo è quella di un ragazzo che, scegliendo l'opzione A, l'ha motivata scrivendo per il *teorema della parcellizzazione*, intendendo quello per parti, come confermato dalla formula scritta appena sotto (Figura 3.47).


Quale delle seguenti uguaglianze è corretta? Giustifica la tua risposta.

A. $\int e^x f(x)\,dx = F(x)e^x + \int F(x)e^x dx$

B. $\int x^2 f(x)\,dx = x^2F(x) - \int 2x\,f(x)\,dx$

C. $\int f(x)\cos x\;dx = F(x)\,sen\,x - \int sen\,x\,F(x)dx$

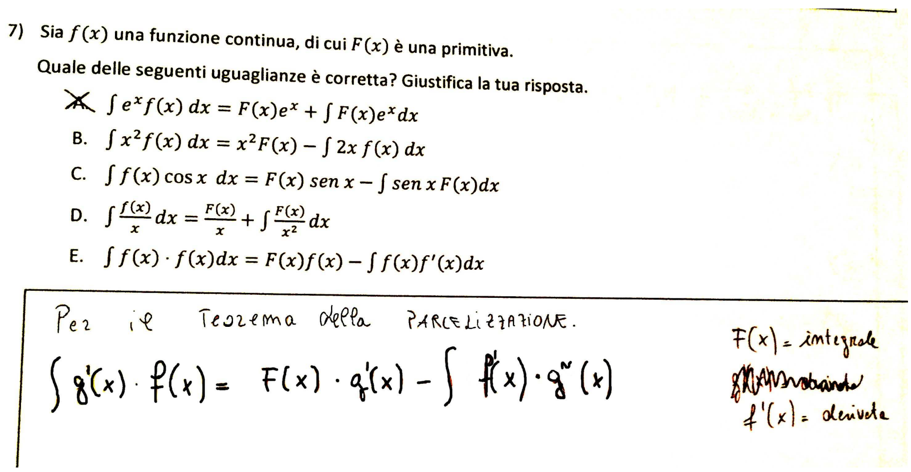
D. $\int \frac{f(x)}{x}dx = \frac{F(x)}{x} + \int \frac{F(x)}{x^2}dx$

E. $\int f(x)\cdot f(x)dx = F(x)f(x) - \int f(x)f'(x)dx$

$\int \frac{f(x)}{x}dx = \frac{F(x)}{x} + \int \frac{F(x)}{x^2}dx$ perchè il $\Delta = 0$

$\int \frac{AX+BX}{X}dx = \frac{AX}{X} + \int \frac{BX}{X^2}dx$

Figura 3.46: *Errore: motivazione errata*



7) Sia $f(x)$ una funzione continua, di cui $F(x)$ è una primitiva.

Quale delle seguenti uguaglianze è corretta? Giustifica la tua risposta.

A. $\int e^x f(x)\,dx = F(x)e^x + \int F(x)e^x dx$

B. $\int x^2 f(x)\,dx = x^2 F(x) - \int 2x\, f(x)\,dx$

C. $\int f(x)\cos x\;dx = F(x)\,sen\,x - \int sen\,x\,F(x)dx$

D. $\int \frac{f(x)}{x}dx = \frac{F(x)}{x} + \int \frac{F(x)}{x^2}dx$

E. $\int f(x)\cdot f(x)dx = F(x)f(x) - \int f(x)f'(x)dx$

Per il Teorema della PARCELIZZAZIONE.

$$\int g'(x)\cdot f(x) = F(x)\cdot g'(x) - \int f'(x)\cdot g''(x)$$

$F(x)$ = integrale

$f'(x)$ = derivata

Figura 3.47: *Errore: per il teorema della parcellizzazione*

Conclusioni

Sono numerose le proposte didattiche rivolte a studenti di quinta superiore dei licei scientifici o dei primi anni di università riguardo lo studio degli integrali. C'è chi è più interessato ad evidenziale l'importanza del legame tra integrale e derivata, chi a sottolineare l'importanza del calcolo delle primitive, chi quello del calcolo delle aree. Uno studio completo di questo argomento richiede tempo e troppo spesso viene affrontato nell'ultimo mese di scuola, rischiando di svolgerlo in modo un pò approssimativo e concentrandosi soprattutto sull'aspetto del puro calcolo delle primitive.
Infatti, sono molte le difficoltà manifestate dagli studenti che, spesso, pur eseguendo alla perfezione il calcolo di un integrale, mostrano di non aver capito bene cosa sia.

L'idea che gli integrali siano un argomento difficile è molto diffusa, oltre al fatto che sono considerati da tanti l'argomento conclusivo della matematica delle superiori e che dagli integrali in poi cominci una matematica superiore. Per poterli studiare è necessario aver acquisito ottimi prerequisiti, ma non è vero che la loro applicabilità pratica può fare a meno di uno studio di uno studio teorico o di una profonda interiorizzazione.

Lo scopo iniziale di questo lavoro era verificare l'apprendimento del calcolo integrale sugli studenti liceali. L'analisi delle risposte al questionario (sia dal punto di vista del numero delle risposte corrette ed errate, sia dal punto di vista dello svolgimento) mette in evidenza molte difficoltà riguardo l'apprendimento del concetto di integrale, infatti molto spesso è confinato alla parte di operativa del calcolo delle primitive.

Si è visto che i ragazzi hanno enormi difficoltà nel ragionare su problemi appena un pò diversi da quelli standard che gli vengono spesso proposti e che fanno fatica a collegare e ricordare i vari argomenti studiati; hanno un metodo di approcciarsi allo studio dell'argomento ricordandosi solo ciò che è strettamente necessario per quello che si sta affrontando, quasi dimenticandosi di tutto il contesto matematico che vi è intorno.

Un'altra cosa che possiamo osservare è che lo studio della teoria dell'integrazione rimarrà per i ragazzi un piano totalmente distaccato e forse un pò anche inutile rispetto alla risoluzione pratica degli esercizi, ed è proprio per questa mancata comprensione teorica che vengono poi commessi la maggior parte degli errori.

Bibliografia

[1] E.Lanconelli, *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 1*, Pitagora Editrice Bologna, 1994

[2] M.Bergamini, A.Trifone, G.Barozzi, *Manuale.blu 2.0 - 5*, Zanichelli, 2011

[3] G.Bolondi, M.I.Fandiño Pinilla, *Metodi e Strumenti per l'Insegnamento e l'Apprendimento della Matematica*, Edises, 2013

[4] G.C.Barozzi, G.Dore, E.Obrecht, *Elementi di analisi matematica*, Zanichelli, 2012

[5] U.Bottazzini, *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Editore Boringhieri, 1981

[6] C.B.Boyer, *Storia del calcolo e il suo sviluppo concettuale*, Mondadori editore, 2007

[7] B.Pini, *Primo corso di analisi matematica*, Cooperativa Libraria Universitaria, 1971

[8] MIUR (2010), *Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'art. 10, comma 3, del d.P.R. 15 Marzo 2010.*

[9] B.D'Amore, *La Vita Scolastica. Inserto: Adotta una idea*, Vol. 61, n° 15, pag 2-3-9, 2007

[10] M.Bramanti, *Emmeciquadro*, numero 36, Agosto 2009

[11] E.Morin, *I sette saperi necessari all'educazione del futuro*, Raffaello Cortina Editore, 2001

[12] A.Genocchi, *Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale*, Fratelli Bocca, Librai di S. M. il Re d'Italia, Torino, 1884.

[13] M.Artigue, *L'evoluzione delle problematiche nella didattica dell'analisi*, La matematica e la sua didattica, 4, 2000

[14] F. Bongiorno, *Calcolo I: Integrali indefiniti, Integrali definiti secondo Riemann, Integrale generalizzato, Serie numeriche, Formula e serie di Taylor, Funzioni in più variabili*, Progetto Leonardo, 2002.

[15] B.Cavalieri, a cura di L.Lombardo-Radice, *Geometria degli indivisibili*, UTET, 1966. bibitemsedici E. Rufini, *Il metodo di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Feltrinelli, 1961.

Ringraziamenti

Alla fine di questa laurea magistrale non posso che dire...che anno! (o come direbbero la Chiara e l'Agni prendendomi in giro...CHE STORIA).

Il primo grazie va al Prof Paolo Negrini per avermi accompagnata in questo percorso di tesi, per avermi seguito con pazienza e per avermi proposto un lavoro che mi è tanto piaciuto. Un altro grazie va alle insegnanti che mi hanno gentilmente permesso di somministrare il questionario nelle loro classi durante le loro ore, alle prof Segalini e Bertolini, perché senza la loro generosità non sarei riuscita a fare nulla, a mia zia Sandra per avermi dato una mano in questo.

Un grazie enorme va ai miei genitori, o meglio conosciuti a tutti come la Bobbi e Giuli il cattivone, per avermi pagato le tasse e per aver creduto in me. Ho dei genitori fantastici per cui devo solo ringraziare.
A Giovanni, perché ti mette sempre tranquillità e per essermi sempre stato silenziosamente vicino.
Ai miei familiari, che mi hanno sempre sostenuta in particolare negli ultimi anni, alla benny perché mi è stata molto vicina.

Alla Laura, perché se tutti avessero un'amica come lei...sarebbero a posto; alla sua attenzione, al suo impegno che mette nel fare le cose, alla sua fedeltà.
A Giangi, per avermi messo a posto il computer almeno una decina di volte e per tutti i piaceri che mi ha fatto gratuitamente (o a suon di barrette Kinder)...ora l'Osteria Francescana ci aspetta davvero.
A Pancione, per essere stato un grande amico.
Alle Anatre..e a tutti gli amici storici.
A Jacopone e ai suoi audio che ti rallegrano sempre la giornata.

Alle Mariolane, all'anno super che abbiamo passato:

a Francescana, per essere stata l'unica a riuscire nell'impresa di farmi iniziare a correre, per aver resistito alle mie insistenze quando le chiedevo la data del suo matrimonio, alle sue partecipazioni che ci stanno aspettando;

alla Chiara, OVVIO che è il TOP dei TOP, al nostro primo giro in roller & #waitingfor27Maggio2017;

all'Agne... per i nostri discorsi sulla vita, a tutte le risate che ci ha fatto fare, ai nostri viaggi mentali e perché ricordiamoci...non vogliamo passare il resto della nostra vita insieme;

a Mariolana, perché è stata l'unica capace di farmi cambiare camera, per i nostri pianti, per avermi fatto iniziare tutte le novene di questo mondo..che funzionano per tutte le altre tranne che per me, ma lei è il TOP dei TOP quindi va bene così.

Alla Laura Cocchi, per essere sempre stata presente, spero solo che mia madre non si commuova quando la vedrà; alla Giulia Vaccari, perché il Signore ci ha fatto incontrare nuovamente nel momento giusto.
Alle Sssssuper o le Ssssssonanti (dipende da Jeggy Superstar): a Margherota, anche se vuol essere citata come Margherita, che è una grande amica che punta sempre in alto, alla Titty e i nostri discorsi di vita spirituale e non, alla Chiara e al suo shopping da MaxMara e alla Jeggy...perché è la Jeggy.

Agli amici dei caminetti, al nostro anno di condivisione e di amicizia, alle mille esperienze che abbiamo fatto insieme.
Agli amici della messa del martedì in seminario.

Agli amici del *si riparte da qui...*: a Onfio, per i messaggi carichi e sconfusionati che scrive sempre, alla Cinzia perché è sempre attenta, a Nicco perché è sempre profondo, a Keky perché se è vero che è dura la vita da bomber.. lui ne è l'esempio.

Alle mie famiglie preferite:

all'Ele e Cecco, a Sammino e Pippolino, per tutta la Grandezza che abbiamo vissuto;

alla Chiara e Cicca per avermi sempre accolto nella loro casa, alla Chiara e a tutte le attenzioni che ha sempre verso di me;

alla Giulia e Claudione, per il loro cammino verso il matrimonio che abbiamo vissuto insieme e perché quando vai a casa loro sembra di essere a casa (forse perché il divano è nostro);

alla Vale e Alle, Tola e la Cate, per aver sempre avuto a cuore le nostre vite e le nostre vocazioni, per averci sempre spronato a guardare in alto;
ai Dotti, in particolare la Lola perché quando é in forma fa morire dal ridere.

A donPi e donSergio, che con santa pazienza mi accompagnano sempre.
Ai miei alunni: Gabri, Samuele, Noemi, Simo, Samuele, Vinci, Luca, Lucas e Giacomo, perché quest'anno mi hanno davvero fatto divertire.

Alle mie compagne di università: alla Meri (che mi ha insegnato a scrivere in latex con santa pazienza e solo per questo si meriterebbe una pagina di elogi) e al nostro sesto piano..se volete trovarci siamo lì, alla Cami, la MariL, la Luis e Romina... per quando mi prendevate in giro per la mia modalità di esami: ON, ma senza di voi questi due anni non sarebbero stati gli stessi.