Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA di SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

APPRENDIMENTO DELLA PROBABILITÁ: UN APPROCCIO PER LIVELLI

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIORGIO BOLONDI

Presentata da:
LORENZO CASADEI

I Sessione
Anno Accademico 2015-2016

Poiché, nonostante la vita solitaria che gli era toccato condurre,
il gabbiano Jonathan era nato per fare l'insegnante.
E, per lui, mettere in pratica l'amore voleva dire
rendere partecipe della verità da lui appresa, conquistata,
qualche altro gabbiano che a quella stessa verità anelasse.
(Il gabbiano Jonathan Livingston, Richard Bach)

Introduzione

Questo progetto di tesi si propone di introdurre e validare dei livelli di apprendimento per la probabilità classica, utilizzando le proprietà che i coniugi Van Hiele avevano utilizzato per stilare dei livelli di apprendimento della geometria. Per tentare di validare questi livelli verranno presentati i risultati di una ricerca condotta su ragazzi di terza media e primo biennio con relative interviste per verificare se effettivamente questi si collocano nei livelli stabiliti a priori.
La tesi presenta una sintetica esposizione sull'origine del calcolo della probabilità e sulle problematiche riguardanti il modo in cui questa sia riuscita ad entrare nei curricoli scolastici, analizzando alcuni articoli che descrivono come la probabilità e la statistica sono riuscite ad entrare nel panorama scolastico francese.
Successivamente, vengono affrontati i temi dell'intuizione e dell'istruzione nell'ambito del calcolo delle probabilità, in particolare delle intuizioni possedute da ogni individuo fin dai primi anni di nascita riguardo questo specifico ambito della matematica. In seguito si parlerà di istruzione, componente che può favorire o ostacolare lo sviluppo delle competenze nell'ambito della probabilità, rendendo manifesto un secondo tipo di intuizione, grazie all'intervento scolastico. A tal scopo, verranno proposti a supporto alcuni lavori di Fischbein, noto pedagogista e matematico. Un'analisi più approfondita dei processi cognitivi verrà effettuata analizzando le euristiche e gli errori sistematici proposti da Kahneman e Tversky, i quali nel corso dei loro studi hanno cercato di descrivere le principali imprecisioni in problemi nell'ambito delle probabilità, come e perché queste si verificano, sotto quali condizioni, in quali contesti e quali processi cognitivi vengono messi in atto.
In seguito vengono proposte le proprietà che i coniugi Van Hiele hanno elaborato per stilare dei livelli di apprendimento della geometria e di come sono state usate per creare dei livelli per la probabilità. L'obiettivo principale del-

la tesi è verificare questi livelli ed eventualmente correggerli o modificarli.
La parte centrale della tesi è perciò focalizzata sulla validazione dei livelli: per questo fine, è stato somministrato un questionario ad alcune classi di diversi istituti, analizzato in un duplice modo: in primis, i protocolli sono stati corretti ed esaminati, per avere un'idea complessiva di come le diverse classi si pongono di fronte ai vari quesiti. In secondo luogo, alcuni studenti sono stati intervistati, con l'obiettivo di individuare le strategie tipiche degli studenti di quella fascia d'età, con diverso grado d'istruzione. Tali strategie sono state catalogate e raccolte in "categorie di pensiero" che permettano di capire i processi cognitivi che gli studenti mettono in atto per tentare di risolvere problemi di probabilità. Queste categorie sono strutturate in modo da poter comprendere il modo di pensare degli studenti di fronte a problemi di tipo non deterministico, cercando di individuare quali processi mentali generano diverse strategie. Grazie all'uso delle categorie è possibile capire in modo piuttosto preciso a quale livello di apprendimento uno studente appartiene.
Infine, il lavoro sulle categorie ha evidenziato alcune imprecisioni e mancanze dei livelli di apprendimento della probabilità stilati a priori: per cui questi sono stati revisionati, corretti, arricchiti e presentati in una versione più completa.
Infine, viene proposta una possibile metodologia con la quale si può inquadrare uno studente all'interno di un livello utilizzando l'analisi di un opportuno test.

Indice

Capitolo 1

Cenni Storici

1.1 Origini della Probabilità

La storia di come ha avuto origine la probabilità, come è stata definita e in seguito come si è sviluppata, formalizzata ed infine anche assiomatizzata è un bellissimo esempio di come si sviluppa una teoria matematica: nasce per dare risposta a problemi concreti, della più svariata natura e la cui soluzione genera altre domande e di conseguenza altre risposte, finché non emerge la necessità di sistemare tale sapere, formalizzarlo, e questa impostazione rigorosa allarga a sua volta gli orizzonti di una teoria della quale nessuno si sarebbe mai immaginato avrebbe avuto così tanti risvolti, perché la semplicità e l'efficienza nella sua lettura e comprensione è essenziale per lo sviluppo della teoria stessa. Il punto più alto viene raggiunto con la sua assiomatizzazione, la derivazione di tutta la teoria con le sue scoperte, risultati e teoremi da alcuni assiomi di base. La probabilità è una teoria che ha seguito tutti questi passaggi, seppur in un tempo più breve rispetto a molti altri campi della matematica, nata per rispondere a problemi di gioco d'azzardo, ovvero per trovare la strategia giusta in un gioco determinato da uscite casuali. In letteratura, discorsi sul caso, sulla fortuna, sulle probabilità hanno origini antichissime, ma per identificare alcuni importanti trattati riguardo la valutazione di situazioni di incertezza, è necessario partire proprio dall'Italia, nel Rinascimento, periodo in cui il nostro Paese vantava alcuni tra i matematici più influenti ed esperti fra i quali Cardano (1501 - 1576): sebbene l'opera in cui parla di probabilità, il *De Ludo Aleae* è essenzialmente un manoscritto e pubblicato postumo alla morte dell'autore, nel 1663, è uno dei più antichi tentativi di dedicarsi alla teoria matematica dei giochi d'azzardo; Cardano era sì un grande matematico ma aveva il vizio del gioco. Poiché perdeva sistematicamente, decise di dedicarsi allo studio dei giochi e nel trattato enunciò due idee principali, che in futuro sarebbero diventati due teoremi fondamentali: il primo fra questi era la *regola per le probabilità congiunte*, che consiste nel moltiplicare le singole probabilità nel caso di eventi indipendenti; la seconda idea era quella che sarebbe stata scritta come *Legge dei Grandi Numeri*, applicandola al caso di uscite del risultato della somma del lancio di 3 Dadi. Senza spostarsi dall'Italia, dopo Cardano è doveroso ricordare di uno tra i più influenti pensatori, filosofi, fisici e anche matematici della storia italiana, che trattò anch'esso di probabilità: Galileo Galilei (1564 - 1642) tra tutti i trattati che pubblicò in *Sopra le scoperte dei dadi* del 1612 analizzava dal punto di vista matematico il gioco della Zara, un gioco d'azzardo che consisteva del lancio di 3 dadi. Il libro di Cardano *de ludo aleae* trattava gli stessi argomenti e anche se non era ancora stato pubblicato è probabile che Galileo ne abbia sentito parlare dai suoi allievi, tuttavia esprime la soluzione con maggior rigore e chiarezza:

> Lanciando 3 dadi il risultato più probabile è il 10 il quale, anche se può essere ottenuto con con 6 possibili combinazioni di numeri come anche il 9 , sono maggiori i casi in cui possono verificarsi queste combinazioni. Ciò dipende dal fatto che il 9 si ottiene con (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3) mentre il 10 con (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4) e sebbene siano entrambe 6 combinazioni, quella con tutti i numeri uguali può presentarsi in un solo modo mentre quella con 2 numeri uguali e uno diverso in 3 modi: avendo il 9 la combinazione con 3 numeri uguali, si ottiene che il 10 si ottiene in 27 modi e il 9 in 25 modi.

All'incirca nello stesso periodo, intorno al 1654 il Cavaliere de Mèrè [1], un famoso giocatore d'azzardo, chiese aiuto a Blaise Pascal (1623 - 1662) su due problemi che divennero famosi per l'importanza storica nella nascita della teoria: il primo era se fosse più probabile ottenere almeno un sei lanciando 4 volte un dado o avere almeno una volta il doppio sei lanciando 24 volte due dadi; il secondo era il problema della divisione della posta di una partita (di un gioco in cui si vince raggiungendo un certo numero di punti) nel caso in

[1] Antoine Gombaud (1607 - 1684)

cui questa venga interrotta prima della fine. Questo secondo problema era già stato affrontato da Fra Luca Pacioli (1445 - 1517), autore della *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, nel caso particolare di dover totalizzare 6 punti e un giocatore ha 5 punti e l'altro 3 e la posta in gioco è di 22 ducati. Per la risoluzione di questi problemi, Pascal iniziò la famosa corrispondenza epistolare con Pierre de Fermat (1601 - 1665) grazie alla quale vennero gettate le basi del calcolo delle probabilità: trovandosi d'accordo nella risoluzione dei problemi, scoprirono e definirono le prime leggi della probabilità e del calcolo combinatorio e proprio nel 1654 Pascal pubblicò il *Traitè du Triangle Arithmètique*, dove appaiono i coefficienti binomiali, che divennero fondamentali per risolvere i più semplici problemi di probabilità.

Qualche anno dopo, precisamente nel 1657 venne pubblicato il primo trattato matematico della probabilità, scritto da Christiaan Huygens (1629 - 1695): il trattato prende il nome di *De ratiociniis in ludo aleae*, anche se è stato tradotto in latino da Frans Van Schooten (il titolo originale era *Van reeckening in spelen van geluck*) e, oltre a diverse riflessioni sui lanci dei dadi, introduce il concetto di speranza matematica e di valore atteso, sempre per rispondere al problema della divisione della posta già affrontato da Pacioli e Pascal.

Dopo la stesura dei primi trattati, la probabilità acquistò importanza nel panorama scientifico e cominciò ad essere applicata ad altri problemi oltre il gioco d'azzardo: ad esempio Leibniz (1646 - 1716), nella *Dissertatio de Arte Combinatoria* del 1666 partecipa al dibattito sull'analisi combinatoria e tenta di applicare le misure di probabilità ad alcuni casi legali. Nel 1662 un mercante londinese, John Graunt pubblicò le prime tavole estensive della mortalità, per trarre delle inferenze statistiche da applicare a problemi di assicurazioni. Un altro esempio fu quello di un barista nel porto di Londra, Edward Lloyd che nel 1668 fondò una delle più antiche e ancora esistenti compagnie assicurative: una delle domande che ci si poneva era quale fosse la probabilità che naufragassero k navi su n salpate sapendo che una nave ha probabilità p di naufragare.

All'inizio del 700 la probabilità è una teoria che sta acquistando sempre più l'interesse della comunità scientifica e sempre più applicazioni. In particolare il 1713 fu una data fondamentale, anno di pubblicazione dell'*Ars conjectandi* di Jakob Bernoulli (1654 - 1705), primo volume importante del-

la teoria della probabilità [2]: in questa trattazione, il maggiore della dinastia Bernoulli prima riprese gli studi di Huygens, per approfondire poi la teoria delle permutazioni e combinazioni, con la prima dimostrazione della formula del binomio; approfondisce in seguito la teoria della probabilità, fino ad enunciare e dimostrare formalmente il teorema che oggi porta il suo nome, ma conosciuta anche come *legge empirica del caso* o *legge dei grandi numeri.*
Grazie al volume di Jakob Bernoulli, pubblicato postumo alla sua morte la probabilità diventò sempre più oggetto di studio dei matematici, suscitando molto interesse.
Nel 1718 Abraham de Moivre (1667 - 1754) pubblicò la *Doctrine of Chances*, in cui dimostra il *teorema del limite centrale* nel caso di variabili aleatorie di Bernoulli simmetriche, risultato che, insieme alla legge dei grandi numeri, fu uno dei primi teoremi di convergenza che aprirà le porte allo sviluppo della teoria. Il 700 è un secolo molto ricco di matematici che si sono dedicati alla probabilità: oltre a de Moivre è giusto ricordare Simpson [3], Thomas Bayes (1702 - 1761), del quale vennero pubblicati nel 1763 alcuni scritti in cui comparve la famosa formula della probabilità condizionata; il conte di Buffon, che con il suo celebre problema [4] cominciò la sfida di dare interpretazioni probabilistiche a questioni di carattere geometrico.
Nell'800 non poteva non contribuire anche in questo campo della matematica Carl Friedrick Gauss (1777 - 1855) che si imbatté nella famosa curva a campana per studiare gli errori di astronomia, che poi prenderà il suo nome.
Dirà in seguito Francis Galton:

> *"Non ho conosciuto altro così adatto ad impressionare l'immaginazione, come la meravigliosa forma dell'ordine cosmico espresso dalla "Legge della frequenza degli errori". Se i Greci l'avessero conosciuta ne avrebbero fatta una dea. Essa regna con serenità e in tutta modestia nella più casuale confusione. Quanto*

[2] Bernoulli: *"Noi definiamo l'arte di congetturare, o stocastica, come quella di valutare il più esattamente possibile le probabilità delle cose, affinché sia sempre possibile, nei nostri giudizi e nelle nostre azioni, orientarci su quella che risulta la scelta migliore, più appropriata, più sicura, più prudente; il che costituisce il solo oggetto della saggezza del filosofo e della prudenza del politico"*

[3] Thomas Simpson (1710 - 1761), ha dato il nome alla densità della somma di due variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite uniformemente su un intervallo limitato

[4] Georges-Louis Leclerc (1707 - 1788): se lanciato un ago di lunghezza l su un piano, dove sono tracciate rette parallele a distanza d una dall'altra, calcolare la probabilità che l'ago intersechi una delle rette

> *più grande è la folla e quanto maggiore è l'apparente anarchia, più è perfetto il suo dominio. Essa è la legge suprema della irragionevolezza.*"

Successivamente, nel 1812 Pierre Simon Laplace (1749 - 1827 nella sua *Théorie analytique des probabilités* dimostra il teorema centrale per p generico e formalizza la definizione classica di probabilità. In seguito la teoria del calcolo delle probabilità crebbe intensamente, tanto da trovare applicazione di tantissimi campi delle scienze. Afferma Laplace:

> "*É sorprendente che una scienza, nata per questioni riguardanti giochi d'azzardo, stia diventando l'oggetto più importante della conoscenza umana [...] Le questioni serie della vita sono, quasi sempre, solo problemi di calcolo delle probabilità.* "

Dalla seconda metà dell'Ottocento, si cominciò a capire la necessità di dover utilizzare il concetto di probabilità anche all'interno scienza sperimentale per eccellenza: la fisica. Scriveva infatti il famoso fisico Clerk Maxwell nel 1854:

> "*La vera logica di questo mondo è il calcolo delle probabilità, che tiene conto del concetto di probabilità che è, o dovrebbe essere, nella mente di ogni uomo ragionevole.*"

L'inizio del Novecento, in particolare il 1900 fu una data storica per la storia matematica: a Parigi, David Hilbert pose l'attenzione della comunità scientifica sui problemi più importanti e non risolti della matematica e, in particolare, sulla questione dei fondamenti del calcolo delle probabilità. Mentre nei fisici aumenta la convinzione di dover descrivere il mondo atomico con modelli probabilistici (Einstein spiegò il moto browniano in termini probabilistici) in Russia, nel 1907 Markov iniziò a trattare le successioni di variabili aleatorie dipendenti [5], costituendo un primo esempio di processo stocastico a parametro discreto di tipo non bernoulliano, ciò che ora si conoscono come, in nome del matematico che le scoprì, le catene di Markov. Nonostante in tanti provarono a risolvere il problema dei fondamenti [6], questo non fu risolto prima del 1933, anno in cui venne pubblicato *Foundations*

[5] Andrej Andreevic Markov (1856-1922) - Il suo interesse verso questo tipo di successioni cominciò con lo studio dell'alternarsi delle vocali e delle consonanti nel poema Eugenij Onegin di Puskin

[6] Diceva Bertrand Russel nel 1927: "*il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, sopratutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato*"

of the Theory of Probability, di Kolmogorov[7]: in questa trattazione, vengono enunciati i tre postulati di *Positività, Certezza e Unione*, considerati come assiomi dai quali poi si sviluppa tutta la teoria, enunciando e dimostrando i teoremi caratteristici della probabilità.
Elevata al livello di teoria assiomatica e risolto quindi il problema dei fondamenti, la probabilità continuò ad essere oggetto di studio da parte di numerosi gruppi di ricercatori, dalla scuola americana di Feller, a quella francese di Lèvy e Frèchet. In Italia ha invece un ruolo molto importante la figura di Bruno de Finetti (1906 - 1985), che diede un'interpretazione alternativa della probabilità:

> "*La probabilità non è nient'altro che il grado di fiducia (speranza, timore...) nel fatto che qualcosa di atteso (temuto, o sperato, o indifferente) si verifichi e risulti vero*".

De Finetti sosteneva la necessità di rendere intuitiva la matematica e la sua concezione, conosciuta come *soggettiva*, della probabilità è orientata in questa direzione: come tale, questa interpretazione non è stata accettata per diversi anni perché ritenuta una visione non oggettiva ma si diffuse più tardi anche per merito di Leonard Jimmie Savage, matematico e statistico statunitense, che la diffuse nel mondo anglosassone relativamente all'impiego nell'inferenza statistica.

1.2 La storia dell'insegnamento del calcolo della probabilità: il caso francese

Per comprendere come storicamente la probabilità è riuscita ad inserirsi nei curricoli scolastici, seppur con difficoltà e molto lentamente, si riporta quello che è avvenuto in Francia: in questo paese infatti, la probabilità ha iniziato lentamente a farsi largo nelle cattedre di scuole e università e il suo sviluppo ha influenzato, in misura diversa, la scuola di molti altri paesi, non solo europei.
In Francia, nel dicembre del 1785 un manifesto di D'Alembert annunciò l'apertura di un nuovo insegnamento, in un'istituzione privata chiamata poi Liceo. Come professori vennero annunciati Deparcieux e Monge per la fisica,

[7] Andrej Nikolaevic Kolmogorov (1903 - 1987) - il titolo originale del volume del 1933 è *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*

Condorcet per la matematica. Tra il 14 e il 16 gennaio 1786 Condorcet tenne la lezione d'inaugurazione, annunciando il programma di matematica per il primo anno, diviso in sei parti:

- Elementi di aritmetica, di geometria e di algebra;
- Meccanica;
- Idrodinamica;
- Applicazioni di matematica a problemi di fisica;
- Spiegazioni sui fenomeni astronomici e sul sistema del mondo;
- Calcolo dell'interesse sui soldi, modo di creare le tavole di mortalità e leggerne i risultati, applicazione della teoria combinatoria sul gioco d'azzardo, varie questioni relative al calcolo delle probabilità.

Tuttavia, queste lezioni furono interrotte nell'agosto del 1787 a causa di una bassa affluenza di studenti, probabilmente perché il livello era troppo alto. Non si conosce esattamente il contenuto dell'insegnamento; tutto lascia pensare che il corso fosse stato interrotto prima che Condorcet potesse fate anche solo una lezione sul calcolo delle probabilità.
Nel 1974 nacque l'Istituto Normale, il 30 ottobre. Questo istituto organizzò delle lezioni di matematica tenute da tre famosi matematici, Laplace, Mouge, Lagrange. Laplace svolse dieci lezioni di cui l'ultima, il 10 maggio 1785, sul calcolo delle probabilità, la prima versione del trattato che pubblicò nel 1814 con il nome di "*Essai philosophique sur les probabilitès*". Questa lezione,che fu discussa in un'ora e ascoltata da un numero importante di studenti, venne pubblicata molto presto e rappresentò l'inizio della diffusione del calcolo delle probabilità in Francia.
Dopo un periodo di chiusura, l'Istituto fu riaperto nel 1808, nello stesso anno in cui apriva i battenti la *Facultè des Sciences de Paris*, nella quale Lacroix era il docente principale; tuttavia, il progetto di creare una cattedra solo per il calcolo delle probabilità non venne portato a termine.
All'istituto Politecnico era previsto un capitolo riguardo le "Applicazioni dell'analisi ai problemi di probabilità e aritmetica politica" all'interno del più ampio corso "Analisi applicata alla geometria" ma probabilmente non ci fu il tempo di affrontare l'argomento durante il primo anno, nel 1975. Tra

gli scritti di Joseph Fourier esiste un manoscritto in cui scrisse di aver partecipato ad un particolare corso su una branca dell'analisi, chiamata "scienza delle probabilità", all'Istituto Politecnico. Il periodo nel quale potrebbe essersi tenuto questo corso si presuppone essere la fine del 1795, ma non si è alla conoscenza di una proposta dello stesso corso in seguito. Secondo Pierre Crèpel, matematico e studioso di storia della scienza, è ragionevole supporre che nessun altro insegnamento di questo tipo ebbe luogo fino al 1816, quando avvenne la riorganizzazione dell'Istituto.
Dal 1816 al 1830, Arago[8] tenne un corso di aritmetica sociale, di circa sei lezioni: a posteriori questo corso può essere considerato come il debutto di un vero e proprio insegnamento probabilistico.
Aragò fu professore di aritmetica sociale fino al 1831, anno in cui gli succedette Savary[9]. Le lezioni di Arago non furono mai pubblicate, ma dal Registro d'Istruzione per l'anno accademico 1825 - 25 possiamo avere un'idea di quali argomenti vennero trattati nelle lezioni:

- Giovedì 7 luglio (1° lezione) Principi generali del calcolo della probabilità;
- Sabato 9 luglio (2° lezione) Applicazioni ed esempi;
- Lunedì 11 luglio (3° lezione) Applicazioni dei principi della probabilità al calcolo delle scelte nel gioco della lotteria. Tavole di mortalità e problemi che esse riescono a risolvere;
- Giovedì 14 luglio (4° lezione) Interessi, sconti e rendite;
- Sabato 16 luglio (5° lezione) Assicurazioni, aritmetica commerciale. Calcolo della media di dati forniti in situazioni particolari.

Fino al 1838 fu Savary a tenere il corso di Argo, che dal 1845 - 35 venne rinominato "Elementi del calcolo delle probabilità e aritmetica sociale", introducendo l'enunciato del teorema di Bernoulli e riducendo la parte di economia. Dal 1838 - 39 la cattedra passò a Duhamel insieme al suo assistente August Comte, sempre durante il secondo anno e con il medesimo programma. Dal 1841 le lezioni di probabilità vennero assegnate a Liouville negli anni dispari e a Sturm negli anni pari.

[8] François Arago (1786-1853)
[9] Felix Savary(1797 - 1841)

Da quel momento, venne ridimensionata ulteriormente l'importanza che si dava al calcolo della probabilità, complice la continua diffidenza della comunità scientifica a tale insegnamento: il programma fu ridotto nel 1845 - 46, in particolare la parte sulla media tra dati diversi e nel 48 - 49 scomparvero anche il teorema di Bernoulli e la probabilità degli eventi futuri stabilita in base all'osservazione di eventi già avvenuti. La lunghezza del corso venne progressivamente ridotta, il metodo dei minimi quadrati insegnato nel corso di geodesia. Nel 1845 venne annullato anche il corso di aritmetica commerciale, in nome della superiore importanza della matematica pura.
La probabilità scomparve sempre di più in Francia; nella Facoltà delle Scienze di Parigi la prima cattedra fu creata nel 1824 ma all'Assemblea dei Professori, Francoeur osservò che "la probabilità era stata insegnata per anni, ma questo corso si era presentato così poco utile che era necessario eliminarlo". Nell'Istituto Normale superiore il corso di probabilità venne attivato da Poisson, dal 1830 al 1840, ma venne eliminato con la morte del celebre matematico.
Agli inizi del XIX secolo, il *Traitè èlèmentaire de calcul des probabilitès* di Lacroix fu l'unico libro, progettato per l'insegnamento della probabilità, oltre ai libri di Poisson del 1837 e di Cournot del 1840 e tali rimasero fino al 1873, anno in cui Laurent pubblicò il suo trattato.
Dal 1854, all'Istituto Politecnico, Bertrand[10] tenne un corso di calcolo delle probabilità fino alla fine del secolo negli anni pari, trovando questa disciplina *"formativa e critica, che cambiava ogni anno in qualche aspetto sia dal punto di vista dei temi che degli esempi"*. D'altra parte, negli anni dispari il corso venne tenuto prima da Hermite e poi da Jordan, il quale però non era molto convinto dell'utilità della materia, confessando che avrebbe volentieri fatto scomparire senza rimorso le lezioni sull'argomento. Dal 1894 - 95 il corso non venne più inserito nel programma del corso di analisi, ma nel corso di astronomia e geodesia come semplice introduzione alla teoria degli errori, fino al 1919 quando venne reintrodotta nei corsi di analisi tenuti da Lèvy[11] e Hadamard[12]. Dal 1919 Lèvy scoprì il lavoro della scuola russa di Chebychev, Markov e Liapunov e decise di introdurre un corso sul moto browninano e tutto ciò che riguardasse la legge di Gauss.
Nel frattempo, alla Facoltà di Scienze nel 1952 il calcolo delle probabilità

[10] Joseph Bertrand (1822 - 1900
[11] Paul Lèvy (1886 - 1971
[12] Jacques Hadamard (1865 - 1963)

venne accorpato ad un altro insegnamento, formando la cattedra di Fisica Matematica e Calcolo delle Probabilità (dimostrazione della deriva di questo insegnamento nell'ambiente accademico). Una notevole svolta ci fu dal 1886 al 1896 quando Poincarè divenne titolare della cattedra e decise di dedicare un intero semestre al calcolo della probabilità, basandosi sugli appunti del corso di Bertrand al Politecnico. Dopo Poincarè, successero Boussineq, che non dedicò nemmeno una lezione all'argomento, Borel prima e Bachelier poi, i quali prestarono una maggiore attenzione rispetto al predecessore. Dal 1919 al 1941 fu Emile Borel il titolare della cattedra e grazie a lui nella Facoltà di Scienze iniziò una buona continuità sull'insegnamento della probabilità, grazie anche ad un maggiore apprezzamento della comunità scientifica, nonostante il numero esiguo di studenti presenti ai corsi.
Riguardo alla statistica, invece, dal 1850 incominciarono ad essere insegnati alcuni elementi della materia, per fini applicativi, all'Istituto Nazionale Agronomico all'interno di un corso sulle tavole di mortalità. Seguirono a questo un corso di economia industriale e statistica nel 1854 al Conservatorio Nazionale di Arti e Mestieri, L'Istituto di Scienze Politiche Levasseur, con un corso nel 1884 di Statistica e Geografia Economica, Fernand Faure nel 1890 con un corso alla facoltà di Diritto di Bordeaux.
Una svolta decisiva avvenne nel 1922 quando venne creato l'Istituto di Statistica di Parigi, tra i fondatori del quale ricordiamo Borel, March e Faure. L'idea era quella di creare un istituto interfacoltario tra le facoltà di Diritto, Scienze, Medicina e Lettere. All'interno dell'Istituto di Statistica dell'Università di Parigi, vennero introdotti corsi destinati alla formazione di studenti in quattro grandi aree: la demografia e l'economia, il campo attuariale, le tecniche e le ricerche industriali e la medicina. Il fine dell'istituto era quello di insegnare il metodo statistico e le sue applicazioni sia dal punto di vista teorico che pratico:

- i metodi statistici e le applicazioni della matematica alla statistica, alla finanza e all'economia politica;
- la demografia, la biometria, l'igiene pubblica e l'istruzione;
- l'assistenza, la previsione e l'assicurazione;
- l'industria, il commercio, l'agricoltura, i trasporti, la banca e il credito;
- le finanze pubbliche.

Il primo anno di studi prevedeva due corsi obbligatori, quello di statistica descrittiva tenuto da March e di statistica matematica di Darmois; in aggiunta si dovevano seguire due corsi a scelta tra demografia e statistica sanitaria, teoria di assicurazioni sulla vita, operazioni finanziarie, elementi di economia politica matematica, applicazione del metodo statistico alla scienza degli affari, legislazione e igiene e assistenza sociale. Si completava il percorso accademico nel secondo anno con altri due corsi a scelta e la tesi finale.
Dal 1924 - 25 fino al 1930 ci fu una media di 4 iscritti l'anno, per poi passare ad 8 fino al 1937 e 15 fino al 1938. Nel giro di 15 anni, furono più di 100 i laureati all'Istituto di Statistica; purtroppo questi non erano considerati all'interno di un diploma universitario, per cui non avevano alcuna possibilità di intraprendere una carriera amministrativa in Francia.
Nei primi anni fu Borel stesso a tenere il corso di Metodi Statistici, basato sugli elementi alla base della statistica matematica; in seguito la cattedra venne presa da Darmois. Nel 1925 - 26, il suo corso comprendeva 16 lezioni:

1. Caratteri statistici. Associazioni.
2. Variabili statistiche. Curve di frequenza.
3. Medie. Devianza. Correlazione. Covarianza;
4. Applicazioni;
5. Correlazioni multiple;
6. Applicazioni;
7. Stabilità di frequenza. Probabilità. Principi fondamentali;
8. Prove ripetute. Teorema di Bernoulli. Legge di Laplace;
9. Applicazioni;
10. Poligoni asimmetrici. Legge dei piccoli numeri;
11. Registrazione dei dati statistici. Dispersione. Schema delle urne;
12. Derivazione di osservazioni. Questo primo piano di lezioni si evolverà presto, verso un'inversione di priorità tra modelli statistici e probabilistici, acquisendo sempre più il rigore matematico.

Nel 1928 Darmois pubblicò *Statistique Mathèmatique*; il trattato include una prima parte di fondamenti della teoria delle probabilità e una seconda sulla descrizione delle osservazioni e il loro trattamento probabilistico. Dal 1925 al 1938 il piano dei corsi cambiò radicalmente, comprendendo circa 20 lezioni:

- 1,2,3 Statistica, stabilità di frequenze. Probabilità. Teoremi fondamentali.
- 4,5,6 Variabili aleatorie, grandezze aleatorie. Medie. Speranze Matematiche. Metodo di Chebychev per la legge dei grandi numeri.
- 7,8 Prove ripetute. Legge di Laplace. Legge di Poisson per le piccole probabilità.
- 9,10 Schema delle urne. Eventi indipendenti. Eventi dipendenti.
- 11,12 Poligoni di frequenza. Curva di frequenza. Rappresentazioni analitiche.
- 13,14 Correlazione. Retta di regressione. Coefficienti di correlazione, di contingenza. Correlazione totale e parziale. Correlazione dei ranghi.
- 15,16 Metodi di stima.
- 19,20 Coefficienti di approssimazione per le funzioni. Dipendenza delle variabili aleatorie e coefficienti di correlazione. Conclusioni generali.

Nel 1952 nacque il Centro della Formazione per le Applicazioni Industriali della Statistica, proponendo quattro tipologie di stages: controllo statistico della qualità, formazione ai metodi statistici, tecniche statistiche per l'ingegneria, economia della ditta. In meno di 10 anni vennero formati più di mille stagisti. Nel frattempo gli studenti dell'Istituto di Statistica aumentavano sempre di più passando dai 40 degli anni 50 fino a superare la cinquantina negli anni 60, dovuto anche al contributo di George Thèodule Guilbaud che, all'interno dell'Istituto, fondo il Dipartimento Universitario di Ricerca Operativa.
Programmi e corsi di apprendimento sulla statistica ormai divennero sempre più apprezzati, tra cui il Centro di Matematica Sociale e di Statistica, fondato da Febvre nel 1955 e un corso per gli studenti di medicina, fondato da Daniel Schwartz nel 1953 (più tardi chiamato

CESAM).
Nel periodo 1945 - 1960 molti centri di formazione come l'Istituto di Amministrazione delle Imprese, il Centro di Studi di Programmi Economici e l'Istituto di Perfezionamento del Metodo di Controllo delle Gestioni integrarono nei loro programmi alcuni corsi di statistica.

Capitolo 2

Il pensiero probabilistico

Per cominciare con un'analisi corretta e dettagliata dello sviluppo del pensiero probabilistico prima nei bambini e poi nei ragazzi, è doveroso parlare di Efraim Fischbein (1920 - 1998) psicologo e insegnante di matematica, capo del dipartimento di Psicologia dell'Educazione dell'Università di Bucarest dal 1959 al 1975. La ricerca di Fischbein si basò sopratutto sul ruolo dell'intuizione nel pensiero matematico-scientifico e lo sviluppo del pensiero probabilistico; nel suo lavoro del 1975 " *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*", analizza il modo in cui il concetto di probabilità si sviluppa nei bambini e si consolida con la crescita e la formazione scolastica. Parlando di "apprendimento probabilistico" si intende una situazione sperimentale in cui una persona si trova di fronte a una successione di prove in cui è prevista una scelta tra due possibili esiti [1] e ad ogni prova, si chiede di prevedere il risultato prima che questo venga mostrato. In queste circostanze, si presenta ricorrentemente un fenomeno chiamato *"probability matching"*, in cui le frequenze relative delle previsioni delle persone approssimano la probabilità dell'evento: per meglio intendere, se un evento ha probabilità p di successo (e di conseguenza l'altro $1 - p$), la probabilità di dare una risposta corretta è $p^2 + (1-p)^2$. Dato che la successione è casuale, la miglior strategia è scegliere l'evento che ha maggior probabilità di uscita ad ogni prova, con una probabilità di successo p (tale strategia si chiama massimizzazione). Fischbein analizzò questa particolare situazione in numerosi casi, varianti e situazioni, convincendosi del fatto che il "probability matching" si può osservare a partire dai bambini di 3-4 anni e tende a stabilizzarsi all'età

[1] per esempio il lancio di una moneta, o un'estrazione di una carta di valore pari o dispari

di 6 anni. Tutto ciò portò Fischbein a pensare che il questo fenomeno è espressione di un particolare tipo di intuizione, quella delle frequenze relative: "*Quando le probabilità delle risposte approssimano la probabilità degli eventi, si può ritenere che il soggetto possieda una particolare intuizione alla probabilità*" (Fischbein, 1975).
Tuttavia si possono riscontrare varie tipologie di situazioni in cui il probability matching non sembra richiedere un particolare tipo di intuizione: per esempio, situazioni in cui la probabilità di un evento cresce dopo che l'evento si è già manifestato più volte; un'altra situazione è quella in cui il soggetto che partecipa ad un esperimento ritiene l'esistenza di un certo schema che sta alla base della sequenza basandosi su un numero troppo piccolo. Entrambe queste considerazioni spiegano, in termini di processo cognitivo, che il probability matching non dipende dalla rappresentazione delle probabilità dei due eventi.
In ogni caso, l'apprendimento della probabilità si sviluppa in una serie di modelli comportamentali ricorrenti nei bambini che si traducono in fenomeni tipici, negativi e positivi: per esempio il "gambler's fallacy", in cui si ritiene erroneamente che eventi passati influiscano sul futuro in attività governate dal caso; oppure, come l'istruzione formale possa far si che "i ragazzi ricerchino strategie sempre più sofisticate, con convinzione sempre maggiore che ci sia una regola che determina sequenze casuali" (Fischbein, 1975).

Parlando di sviluppo dei concetti nei bambini, in particolare delle idee di probabilità e scelta, non si può non fare riferimento alla figura di Piaget [2] e i suoi collaboratori: nei suoi lavori, Piaget mette in luce come all'interno del più generale sviluppo cognitivo, il potenziamento delle capacità logico-operazionali aumenti le abilità di analisi di situazioni in incertezza e quindi del pensiero probabilistico. Lo sviluppo di questo particolare modo di ragionare avviene gradualmente nello sviluppo cognitivo del bambino, che attraverso altre capacità e competenze riesce a comprendere il concetto di scelta e quindi di stima di probabilità.
Per molti aspetti, le teorie di Fishbein sono concordi con quelle di Piaget, in particolare nel sottolineare la complessità dello sviluppo di idee probabilistiche, tuttavia ci sono alcune differenze fondamentali: Fischbein non è convinto che l'idea di scelta e casualità emerga solo con lo sviluppo delle

[2] Jean Piaget (1896 - 1980)

capacità operazionali, ma distingue il concetto di "intuizione primaria" da quello di scelta, adducendo a quel tipo di intuizione costruita giorno per giorno dalle esperienze del bambino. Al contrario di Piaget, la teoria di Fischbein dello sviluppo del concetto di probabilità è inevitabilmente collegato con l'educazione e con l'istruzione scientifica, principalmente scolastica: se inizialmente è presente un'intuizione primaria, spontanea e derivata dalle esperienze personali, in seguito si riscontra una "intuizione secondaria", ovvero quella in cui i concetti hanno tutte le caratteristiche dell'intuizione, ma sono formalizzate dall'educazione scientifica. Nella teoria di Fischbein è fondamentale l'influenza reciproca delle intuizioni, del pensiero logico e dell'istruzione, ecco perché i bambini hanno bisogno di esperienze concrete in cui percepire le dinamiche di fenomeni stocastici, per familiarizzare con con i concetti esperimento, previsione, verifica, scelta e necessità, leggi statistiche, ecc.
Una delle componenti più importanti che l'educazione scolastica deve trasmettere sono i "modelli generativi" (Fischbein)[3], ovvero schemi che rappresentino intere classi di fenomeni collegati tra di loro e che si possano adattare ad altre situazioni simili: la costruzione di una buona intuizione secondaria si può ricondurre alla creazione e all'utilizzo di adeguati modelli generativi.
Un ultimo problema molto rilevante riguardo l'insegnamento della probabilità è l'ambiente (scolastico e non) che circonda i ragazzi, che li porta alla ricerca di relazioni causali che abbiano spiegazioni univoche: tutto ciò è causato anche dall'istruzione in tante materie (fisica, chimica, matematica ma anche storia e geografia) in cui viene usato un ragionamento logico-deduttivo in situazione di certezza ma non vengono usati concetti collegati alla scelta, che rimangono quindi fuori dallo sviluppo intellettuale e dagli schemi operazionali del pensiero.

2.1 L'Intuizione

Ci sono alcuni aspetti molto importanti di cui è opportuno parlare relativamente alla comprensione del pensiero probabilistico e, nello specifico, sull'intuizione: in primis, il modo in cui l'intuizione si adatta all'ambiente in cui si cresce e come viene caratterizzata dalla nostra esperienza. Se l'intuizione ha la capacità di adattarsi, perché spesso ci porta ad errori di

[3] generative model

giudizio? Fischbein suggerisce due risposte a questa domanda, ossia il fatto che l'esperienza umana sia limitata e il considerare l'origine dell'intuizione da attività pratiche e realtà concrete, con alcune proprietà che devono essere rimosse per costruire un concetto astratto.
Riguardo alla probabilità, il problema sta nella grande distanza tra problemi concreti in cui si mostrano ragionamenti (in termini di probabilità) sbagliati o intuizioni errate e l'esperienza assolutamente confusionaria che le persone hanno riguardo situazioni di incertezza. "Il processo di apprendimento e comprensione è interpretato come un reciproco processo di comunicazione tra una certa situazione e la struttura matematica"(Fischbein, Nello, Marino 1991).
Un modo quasi ovvio per ridurre questa distanza è l'esperienza di ragazzi e adulti ai giochi d'azzardo o in generale dove occorre fare una scelta. Anche se questo tipo di esperienza può essere affinata, non è così ovvio che chi ha grandi abilità in questo tipo di giochi può astrarre facilmente i principi della probabilità.
Un altro aspetto fondamentale è la difficoltà ad ottenere un feedback corretto dopo aver preso una decisione in ambito probabilistico: per esempio, è difficile convincere un giocatore d'azzardo di aver fatto una scelta sconveniente dopo che questa ha avuto successo, in questo caso l'intuizione porta alla strada sbagliata. A livello generale, è importante capire che è possibile prendere decisioni razionali in relazione a fenomeni casuali e in particolare è contro-intuitivo capire che trarre una conclusione nell'ambito probabilistico è indipendente dall'eventuale risultato. Per convincersi di ciò, bisogna essere a conoscenza di una classe di equivalenza di situazioni replicate molte volte, in modo che poi emerga l'andamento a lungo termine. In ogni caso, l'interpretazione dei dati è soggetta a diverse letture, per esempio la tendenza ad attribuire probabilità maggiori a eventi che per ragioni cognitive e affettive, ci ricordano il passato[4].
L'intuizione probabilistica è molto diversa dall'intuizione che si usa in altre discipline matematiche e scientifiche: basti pensare al fatto che i bambini sono predisposti fin da subito a trattare le figure geometriche, sviluppando quindi un'intuizione naturale per questo campo. Lo stesso ragionamento può essere applicato con l'aritmetica (Borovcnik e Bentz, 1991), i bambini sono abituati fin da subito a paragonare delle quantità, a fare semplici operazio-

[4]"Availability", Tversky e Kahneman, 1974

ni mentali su quantità certe, mentre la probabilità non funziona così; basti pensare che la probabilità minuscola di vincere al lotto è controbilanciata dal fatto che ogni settimana ci sono delle persone che vincano. Inoltre le scienze che si studiano da bambini parlano tutte di quantità certe, con numeri esatti e situazioni dove non si cerca la scelta di ciò che è più conveniente ed è quindi normale che è più difficile si sviluppi un'intuizione primaria della probabilità.

2.2 L'Istruzione

Nel 1984, Fischbein e Gazit cercarono di capire come l'insegnamento della probabilità possa intervenire nella intuizione probabilistica. In ragazzi di età dai 10 ai 13 anni (livello dal 5 al 7) di Israele hanno partecipato a 12 lezioni riguardo:

- eventi certi, possibili e impossibili
- risultati ed eventi in esperimenti probabilistici
- il concetto di casualità
- probabilità e frequenze relative
- contare i casi
- eventi semplici e composti e loro probabilità

I risultati ottenuti mostrarono che sebbene molte idee erano troppo difficili per ragazzi di 10 e 11 anni (livello 5) circa il 60% - 70% di studenti di 12 anni (livello 6) e l'80% - 90% di studenti di 13 anni (livello 7) riuscivano a capire ed applicare la maggior parte dei concetti, in classi che non avevano affrontato direttamente la probabilità. In questo esperimento, infatti, si è cercato di verificare e analizzare l'effetto indiretto che ha avuto l'istruzione su una serie di problemi relativi all'intuizione probabilistica. Nelle classi esaminate è sembrato che l'istruzione avesse conseguenze positive su alcune misconcezioni base, mentre un effetto negativo su altre, in particolare gli studenti si sono dimostrati più abili in situazioni in cui si doveva utilizzare il concetto di proporzionalità per comparare i vari casi. Contrariamente alla visione di Piaget, Fischbein e Gazit (1984) suggerirono che il pensiero probabilistico e l'uso delle proporzioni sono determinate da schemi mentali

differenti. Ritenevano inoltre, che "enfatizzare specifici punti di vista e procedure in probabilità può disturbare il ragionamento proporzionale, ancora fragile in alcuni adolescenti".
Secondo Fischbein, è molto complessa l'interazione tra intuizione, progresso logico e effetti che l'istruzione ha nello sviluppo cognitivo. Nel momento in cui si pensa ad una strategia pedagogica di educazione, ci sono tre punti fondamentali che tengono conto delle intuizioni: per prima cosa abbiamo le intuizioni primarie, che devono essere identificare tramite una "investigazione sistematica psico-didattica"(Fischbein, 1991) perché gli studenti si troveranno inevitabilmente ad utilizzarle ed è quindi fondamentale che i ragazzi imparino ad analizzarle e formalizzarle; inoltre modificare un'intuizione primaria o adattarla a nuove situazioni è incredibilmente difficile in quanto necessita di una profonda riorganizzazione di convinzioni cognitive molto radicate.
In seguito, è necessario che l'istruzione a porre le basi fatte da solide intuizioni secondarie e questo vuol dire che devono essere messi di fronte a situazioni in cui possano "giocare con la probabilità", avere una parte attiva nel calcolo di queste, predire risultati in situazioni di incertezza, lanciare dadi ed estrarre carte, registrare e valutare le varie sequenze di uscite che si ottengono; infatti osservare le frequenze relative può essere la miglior strategia per contribuire allo sviluppo di intuizioni probabilistiche. Se un determinato concetto non è rappresentato in modo intuitivo, la mente cerca di sostituire questo concetto con un modello che possa sostituire la nozione stessa nel processo di ragionamento: tramite o indipendentemente dall'istruzione si costruiscono dei *modelli intuitivi*, che vengono in aiuto nel momento in cui nozioni non ben fondate vengono messe in discussione.
Infine è importantissimo ricordare che nonostante l'istruzione e l'educazione alla probabilità, le intuizioni primarie non spariscono e continuano a influenzare in nostri giudizi di nascono: Fischbein chiama questo "dilemma pedagogico", ovvero quando i modelli intuitivi che ci costruiamo per analizzare concetti matematici diventano parte integrante del nostro pensiero e rimangono tali nel momenti in cui devono essere cambiati o modificati. Questo è un problema che, sempre secondo Fischbein, non può essere evitato ma deve essere affrontato con un'appropriata strategia didattica. In particolare va considerato l'effetto demoralizzante che può avere sui ragazzi il rendersi conto di aver basato i loro ragionamenti su fatti non completamente veri;

ciò che suggerisce Fischbein è di spiegare ai ragazzi che questo fatto è un procedimento assolutamente naturale, che non è sbagliato e non va in alcun modo combattuto.

Capitolo 3

Decisioni in condizioni di incertezza: Euristiche ed Errori Sistematici

Kahneman e Tversky[1] sono due psicologi israeliani, pionieri della psicologia cognitiva[2]; hanno collaborato per anni nel campo della ricerca delle euristiche, nello studio degli errori sistematici e allo studio di decisioni in condizioni di rischio.
Nel momento in cui è necessario prendere una decisione riguardo l'eventualità della realizzazione di un fenomeno, si tende a fare una previsione numerica, ovvero una stima di probabilità soggettiva. Quando questo fenomeno è molto complesso, è necessario favorire l'analisi del problema utilizzando operazioni più semplici che tuttavia esprimono un giudizio meno completo, facendo delle stime basate su un numero limitato di principi euristici; questi sono piuttosto utili, ma può accadere che iper-semplificando un problema c'è il rischio di imbattersi in *errori sistematici* (cognitive biases). La valutazione soggettiva è basata su giudizi determinati da informazioni di validità limitata, che vengono interpretate dal sistema cognitivo mediante principi euristici: un esempio fisico può essere il fatto che la distanza viene spesso sovrastimata in condizioni di scarsa visibilità e sottostimata in caso contrario. Errori di questo sono piuttosto frequenti sopratutto quando si esprime

[1]Daniel Kahneman (1934) Amos Tversky (1937 - Tversky)

[2]studio dei processi mentali, di come le informazioni vengono acquisite dal sistema cognitivo

un giudizio intuitivo di probabilità, con conseguenze teoriche e applicate che tutt'ora sono descritte e analizzate in numerose ricerche.

3.1 Rappresentatività

Molti problemi probabilistici che vengono posti sono del tipo "*qual è la probabilità che l'oggetto A appartiene alla classe B?*" Tipicamente ci si approccia a questo tipo di situazioni utilizzando "l'euristica della rappresentatività ", ovvero che la probabilità viene stimata nella misura in cui A è rappresentativo (assomiglia) a B. Se A è molto rappresentativo di B si ritiene essere molto alta la probabilità che A è generata da B; al contrario, se A non assomiglia a B, è giudicata bassa.
Per esempio, si consideri la situazione in cui è stato descritto un certo Steve in questo modo: "*Steve è molto timido e riservato, tanto disponibile, ma non è molto interessato alle persone, al mondo reale. Un anima mite e precisa, ha tanto bisogno di ordine e organizzazione e una grande passione per i dettagli"*. In che modo può essere stimata la probabilità che il suo impiego sia uno di quelli scelti da una lista di lavori possibili(per esempio contadino, pescatore, pilota, libraio o fisico)? Nell'euristica della rappresentatività, viene valutata alta la probabilità di fare un certo lavoro nella misura in cui la sua descrizione assomiglia allo stereotipo di quella particolare professione. Una scelta di questo tipo può portare a tanti tipi di errori poiché la rappresentatività non viene influenzata da alcuni fattori fondamentali quando si tenta di stimare la probabilità che un evento accada.

Insensibilità alla probabilità a priori

Uno degli effetti che si evidenziano nella valutazione della probabilità per rappresentatività è non tenere conto delle frequenze, ovvero essere insensibili alla probabilità a priori; tanto si è concentrati nel trovare corrispondenze tra diversi tipi di oggetti o classi che ci si dimentica di tutte le condizioni che ci possono essere a priori, indipendentemente dalla formulazione del problema. Nel problema sopra citato, per stimare la probabilità della professione di Steve è essenziale considerare il numero reale di contadini e librai, poiché il numero dei primi è molto maggiore; se la probabilità viene valutata per rappresentatività, i fattori a propri verranno trascurati. La tendenza è di ignorare la probabilità a priori quando viene fornita una descrizione qualitativa, anche nel caso in cui questa non attribuisca alcuna informazione in più.

Insensibilità alla grandezza del campione

L'euristica della rappresentatività viene usata sovente per valutare la probabilità di ottenere, estratto da una popolazione specifica, un certo risultato. Cioè, si valuta la probabilità di ottenere un risultato in un certo campione per similarità dello stesso parametro con la popolazione totale: la similarità di una statistica rispetto alla popolazione non viene considerata dipendente dalla numerosità del campione. Perciò, valutando la probabilità per rappresentatività, i giudizi su un campione statistico vengono considerati essenzialmente indipendenti dalla grandezza del campione stesso, assegnando la medesima distribuzione per campioni di diversa grandezza.
Frequentemente vieni ignorata la numerosità del campione anche quando viene enfatizzato in un problema: vediamo il seguente:

> In una certa città ci sono due ospedali. Nel più grande nascono circa 45 bambini al giorno, nel più piccolo solo 15. Come ben sai, circa il 50% dei nati sono maschi. Comunque, la percentuale esatta varia giorno per giorno.
> Per un anno ogni ospedale riporta i giorni in cui sono nati almeno il 60% maschi. Quale ospedale pensi avrà segnato più giorni?
>
> - Il più grande (21)
> - Il più piccolo (21)
> - Circa lo stesso (cioè più o meno il 5%) (53)

Tra parentesi ci sono le risposte date dagli studenti universitari.
La maggior parte giudicano la probabilità di avere il 60% maschi la stessa nel piccolo e nel grande ospedale, pensando che siano ugualmente rappresentativi della popolazione generale, in contrasto col fatto che nell'ospedale grande è meno probabile allontanarsi dal 50% proprio perché il campione è più numeroso: evidentemente questa nozione fondamentale di statistica non fa parte delle intuizioni basilari delle persone.

Misconcezioni del caso

Un altro degli effetti negativi della rappresentatività è una qualsiasi sequenza (anche molto breve) di eventi generati da un processo casuale sia rappresentativa del processo intero ed evidenzi le caratteristiche essenziali. Considerando dei lanci ripetuti di una moneta, la tendenza è ritenere più probabile l'uscita di H-T-H-T-T-H piuttosto della sequenza H-H-H-T-T-T che sembra meno casuale, e anche della sequenza H-H-H-H-T-H, che non rappresenta l'equità della moneta. Aspettarsi che le caratteristiche essenziali della moneta (in generale, del processo) si rivelino non solo globalmente, ma anche localmente, in tutte le sue parti è uno degli effetti dell'euristica della rappresentatività; questo pensiero porta sistematicamente fuori strada, in quanto piccole sequenze contengono troppe alternanze e poche regolarità. Un'altra conseguenza è la "fallacia del giocatore" [3], in Italia molto famoso per il luogo comune sui numeri ritardatari: nel lotto si è soliti pensare che un numero che non esce da molto tempo diventa più probabile che esca ad ogni estrazione. Il caso viene percepito come un processo auto-correggente, in cui una deviazione in una direzione induce ad un deviazione nell'altro senso, per ripristinare una sorta di equilibrio.
In molti, a detta di studi psicologici, sono influenzati dalla cosiddetta "legge dei piccoli numeri", secondo la quale anche campioni ristretti sono rappresentativi della popolazione dalla quale sono presi. Si verifica sovente l'aspettativa che un'ipotesi valida su una popolazione sarà statisticamente valida anche nei suoi campioni, indipendentemente dalla grandezza di questi; errori di questo tipo possono portare alla selezione di campioni di grandezza inappropriata e alla sbagliata interpretazione dei risultati.

Insensibilità alla predicibilità

Fare previsioni riguardo eventi futuri, che sia il valore di un oggetto, la richiesta di una merce o risultati di eventi sportivi, è un problema al quale le persone vengono sottoposte oramai quotidianamente; troppo spesso accade di usare l'euristica della rappresentatività per fare questo tipo di previsioni. Per esempio, se una compagnia venisse descritta in modo molto positivo, per rappresentatività siamo portati ad immaginarci che avrà dei buoni pro-

[3] gambler's fallacy

fitti (e viceversa). É tuttavia importante considerare il fatto che questa descrizione non sempre è fatta in modo affidabile e perciò le previsioni non risultano essere troppo accurate: se l'unico metro di misura della probabilità è una descrizione favorevole, queste aspettative diventano insensibili alla predicibilità, ovvero poco affidabili rispetto parametri evidenti e quindi poco precise. Tuttavia, ragionare in questo modo non tiene conto del fatto che la predicibilità influenza gli estremi e l'ampiezza di una previsione: se la predicibilità fosse nulla, la stessa previsione dovrebbe essere fatta in tutti i casi, mentre se fosse perfetta i valori predetti corrisponderebbero ai valori attuali e nello stesso modo combacerebbero le ampiezze delle previsioni e dei risultati.
Numerosi studi hanno tuttavia mostrato che previsioni intuitive violano questa legge e si tende a considerare relativamente (o per niente) la predicibilità.

Illusione della validità

É già stata osservata la tendenza a scegliere il risultato più rappresentativo delle informazioni che vengono fornite e la confidenza che si ha sulla previsione dipende sopratutto dal grado di rappresentatività, senza tener conto dei fattori che limitano la precisione della previsione. In questo caso si genera una fiducia immotivata sulla previsione, causata da un ottimo collegamento tra le ipotesi iniziali e il risultato previsto. Questo genere di conseguenza, chiamata anche illusione della validità, continua a persistere nonostante l'essere consapevoli di tutti i fattori che possono ridurre la validità delle previsioni.
Ipotesi coerenti e consistenti fra loro generano un'aspettativa molto più fiduciosa sulle previsioni basate su questi input: gli schemi osservati si giudicano migliori se sono molto ridondanti o correlati. Gli studi statistici sulla correlazione, inevece, dicono esattamente il contrario, ovvero che che, date variabili sicure, le previsioni basate su queste sono molto più accurate se i dati sono indipendenti l'uno dall'altro. L'effetto che si genera è che la ridondanza tra diversi input diminuisce la precisione della previsione ma ne aumenta la fiducia.

Regressione dalla media

Si supponga che un numeroso gruppo di studenti sia stato esaminato da due versioni equivalenti di un test attitudinale. Se si scelgono dieci ragazzi tra quelli che hanno fatto meglio una delle due versioni troveranno quell'altra insoddisfacente; d'altra parte, se si scelgono dieci ragazzi tra quelli che hanno fatto uno dei test peggiori, troveranno l'altra versione migliore.Ciò è dovuto ad un fenomeno conosciuto come *regressione dalla media*, documentato anche da Galton più di 100 anni fa.
In molte situazioni si verificano effetti di regressione dalla media ma, poiché non ci si aspetta questo tipo di misconcezione anche in contesti in cui è probabile accada, non si sviluppa autonomamente una appropriata intuizione di questo fenomeno; quando si presentano situazioni di regressione, ci si inventano false spiegazioni per giustificarlo.
Una delle conseguenza tipiche di questo tipo di errore può essere quella, dopo aver commesso di un certo tipo di errore, di rischiare di commettere l'errore opposto ritentando, per esempio sovrastimare per correggere un errore di sottostima.

3.2 Disponibilità

La facilità con cui si ricordano certi tipi di fenomeni può influenzare la valutazione che si da della frequenza con cui essi accadono e di conseguenza la loro probabilità di verificarsi. Per esempio, succede che si valuti il rischio di un attacco di cuore tra le persone di mezza età ricordandosi di questo tipo di episodi accaduto a conoscenti: di conseguenza, chi nella sua vita ha vissuto più volte questo tipo di fenomeni tenderà a sovrastimare questa probabilità. Questo tipo di euristica è chiamata *disponibilità*. Può essere sicuramente uno strumento utile per stimare frequenze e probabilità, tuttavia non è influenzata solo dalla frequenza e dalla probabilità, ma anche da altri fattori che possono portare ad errori prevedibili e sistematici.

Errori dovuti alla recuperabilità degli eventi

Quando si giudica la grandezza delle classi per disponibilità, si ritiene una classe più numerosa di quella che realmente è nella misura in cui i suoi elementi sono più recuperabili, ovvero quanto facilmente questi vengono in mente. In un esperimento è stata consegnata una lista di personaggi famosi

ad un certo numero di persone, con diverse liste a diversi gruppi di persona, e veniva chiesto di dire, dopo aver letto la lista, se c'erano più uomini o donne. Queste liste erano costruite in modo tale che i personaggi di un sesso erano relativamente più famosi di quelli dell'altro. In ogni lista gli intervistati hanno ritenuto erroneamente che la classe più famosa era anche quella più numerosa.
Sono anche altri i fattori che influenzano la recuperabilità, per esempio quanta importanza viene attribuita al verificarsi di un fenomeno: vedere una casa bruciare aumenta la recuperabilità in misura maggiore del leggere la notizia in un giornale. Un esempio di diffusa valutazione di probabilità si può vedere nel seguente grafico a bolle.

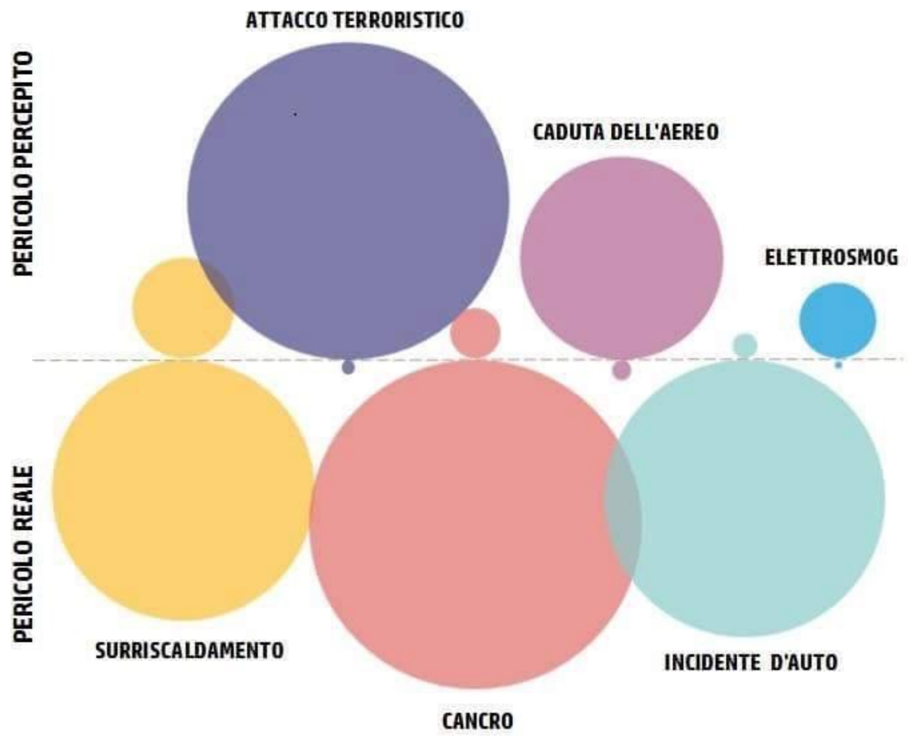


Figura 3.1: FONTE Susanna Hertrich, immagine basata dai lavori del Dr Peter M. Sandman

Questa immagine mostra che l'essere bombardati dai media da notizie tragiche, che hanno un forte impatto emotivo aumenta la stima che si dà della probabilità che si verifichino. Sicuramente la paura genera molta diffidenza e preoccupazione, e fa si che la probabilità che accadano questi funesti

eventi venga altamente sovrastimata.
Infine, non è assolutamente da trascurare l'aspetto temporale, in quanto episodi recenti sono più facilmente recuperabili: la probabilità soggettiva di incidente tende ad aumentare se è da poco tempo che è stata vista la polizia a bordo strada per un sinistro stradale.

Errori dovuti alla efficacia della ricerca

É più probabile che una parola inizi con la lettera p o che la terza lettera sia una p? Per risolvere questo problema si cerca di ricordare tutte le possibili parole che verificano i due casi, attribuendo maggiore probabilità al caso in cui vengono in mente più parole. É logico supporre si ricordino molto più facilmente le parole che iniziano con una certa lettera e perciò si tende a pensare che queste siano di più, piuttosto che quelle che hanno una consonante in una posizione fissata. Un'altra situazione in cui si verifica ciò è il considerare all'interno di un discorso, più frequenti le parole astratte di quelle concrete, poiché alle primi si attribuisce un'intensità molto maggiore rispetto alle secondo e, sempre per l'euristica della disponibilità, appaiono molto più frequenti i contesti in cui appaiono.

Errore di immaginabilità

Per stimare le frequenze di eventi appartenenti ad una certa classe generati secondo una certa regola, solitamente si fanno alcune prove per capire l'andamento del fenomeno, tenendo conto della felicità con cui si ottengono i casi rilevanti. Tuttavia, questa strategia non sempre rivela la frequenza.Si consideri, per esempio, un gruppo di 10 persone che formano dei sottogruppi di k membri, con $2 \leq k \leq 8$. Quanti sottogruppi di k membri si possono formare? La risposta corretta è $\binom{10}{k}$. Chiaramente il numero di sottogruppi di k membri è uguale a quello di $(10 - k)$, perché un gruppo di k membri definisce un unico gruppo di $(10 - k)$ non-membri.
Un modo per risolvere questo problema senza i calcoli è costruire mentalmente i sottogruppi di k membri e stimare il numero con la facilità con cui si riesce a costruirli, per cui con questo ragionamento sottogruppi di 2 saranno più numerosi dei comitati di 8, perché molto più facili da costruire. La frequenza è assegnata per immaginabiltà, o per disponibilità alla costruzione,

perciò sottoinsiemi facilmente costruibili sembrano molto più frequenti di quelli che sono più difficili da ricostruire.

3.3 Aggiustamento e Ancoraggio

In molte situazione si fanno stime partendo da un valore iniziale che viene aggiustato per arrivare alla risposta finale. Il punto di partenza può essere dato dalla formulazione del problema o essere un risultato parziale: in ogni caso, questo tipo di aggiustamenti vengono fatti in maniera inadeguata. Partendo da diversi dati iniziali si ottengono diverse stime, influenzate in diverso modo: questo tipo di fenomeno si chiama *ancoraggio*.

Aggiustamento insufficiente

In una dimostrazione di questo effetto, è stato chiesto ad un gruppo di persone di stimare alcune quantità in percentuale (per esempio la percentuale di nazioni Africane nelle Nazioni Unite). Per ogni quantità, prima è stato assegnato un numero casuale tra 0 e 100: gli intervistati dovevano prima di tutto indicare se la percentuale estratta era più alta o più bassa del valore reale, poi stimare il risultato muovendosi più in alto o più in basso rispetto alla previsione casuale. Per esempio, le stime medie della percentuale di stati Africani nelle Nazioni unite sono state 25 e 45 per i gruppi a cui era stato assegnato rispettivamente 10 e 65. Uno caso in cui si è verificato un fenomeno è quando il dato iniziale è determinato da qualche calcolo incompleto. Per esempio, in una scuola è stato chiesto, ai due gruppi differenti, di dare una stima di una operazione in 5 secondi. Al primo gruppo è stato assegnato

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

mentre al secondo:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$$

Per rispondere rapidamente alla domanda, la strategia più comune è quella di fare alcune moltiplicazioni e poi stimare il prodotto per estrapolazione prima e aggiustamento poi, ovvero si fanno alcune operazioni e poi si da una stima indicativa di quello che potrebbe essere il risultato a seconda del risultato parziale, però si ottiene come risultato una stima sbagliata.É stato osservato che nella serie crescente, la stima media riportata è di 512 mentre in quella decrescente di 2250, entrambi lontani dal valore reale di 40320.

Errori nella valutazione di eventi congiunti e disgiunti

In uno studio (Bar-Hillel 1973), ai soggetti presi in esame è stato chieto di fare una scelta fra 3 tipologie di eventi: eventi semplici, come scegliere una caramella rossa da una scatola che ne contiene 50% rosse e 50% bianche: eventi congiunti, come scegliere sette volte di fila una caramella rossa, con reimbussolamento, in una borsa in cui il 90% erano rosse e il 10% bianche; eventi indipendenti, come scegliere almeno una caramella rossa da una scatola in cui 10% erano rosse e 90% bianche, sempre con reimbussolamento. Le scelte effettuate dalla maggioranza degli intervistati sono state di scegliere di scommettere, in ordine, prima sugli eventi congiunti, poi su quelli semplici e infine su quelli disgiunti, anche se i primi sono i meno probabili e gli ultimi i più probabili. Questo esperimento rivela la tendenza a sovrastimare eventi congiunti e sottostimare quelli disgiunti, usando l'euristica dell'ancoraggio. Questo tipo di errori porta a cattive valutazioni nelle stime, ad esempio, di un piano imprenditoriale, in cui tanti eventi molto probabili devono verificarsi in successione, riducendo complessivamente la probabilità totale proprio perché sono eventi congiunti. Invece, per eventi disgiunti si genera l'effetto, per esempio, di una pessima valutazione del rischio, nel quale in una successione di eventi poco probabili basta che se ne verifichi uno per accadere un evento potenzialmente catastrofico: tuttavia, il fatto che si considerano tanti eventi poco probabili, la probabilità totale viene sottostimata.

3.4 Alcune Considerazioni

Gli errori le le euristiche riportate non vengono influenzati da fattori come gratificazioni o penalità. Molti di questi errori di giudizio accadono nonostante i soggetti fossero incoraggiati a rispondere in modo preciso o con la promessa di un premio se mai avessero risposto correttamente. Questo tipo di euristiche ed errori non sono tipiche solo delle persone che non hanno avuto la possibilità di un'istruzione approfondita: la tendenza alla rappresentatività, senza una sufficiente considerazione della probabilità a priori è stata osservata anche nei giudizi di oggetti che avevano avuto un'ot-

tima istruzione in statistica. Sebbene l'uso della statistica può permettere di evitare alcuni errori sistematici, tipo la fallacia del giocatore, i loro giudizi intuitivi sono soggetti a simili errori in problemi più difficili. Non deve sorprendere il fatto che queste euristiche possano essere essere utili, nonostante possano portare ad alcuni errori; quello che può risultare inaspettato è che sono poche persone che riescono a comprendere i concetti di regressione o di campionamento autonomamente, pur trovano nella vita quotidiana tante situazioni in cui toccare con mano queste particolarità.
Analizzare empiricamente i vari tipi di errori cognitivi ha numerose implicazioni sull'abilità di stimare la probabilità: le moderne teorie di decisione riguardano molto la probabilità soggettiva come un modo per quantificare un'idea.(Kahneman e Tversky, 1974). La probabilità soggettiva è definita come l'insieme di scommesse che si è disposti ad accettare riguardo ad un evento: una misura soggettiva di probabilità che sia consistente si può ricavare per un individuo se le sue scelte tra le scommesse soddisfano alcuni principi, ovvero gli assiomi della teoria.
La natura soggettiva della probabilità ha portato molti studenti a credere che la consistenza interna è il solo valido criterio da usare per stimare la probabilità. Dal punto di vista della teoria formale della probabilità soggettiva, ogni insieme di giudizi coerenti sulla probabilità può essere considerato esatto come ogni altro, tuttavia ci può essere incompatibilità tra i giudizi e alcune convinzioni dell'individuo. Se consideriamo una persona che soggettivamente giudica le probabilità del lancio di una moneta con l'euristica della fallacia del "gambler's fallacy", la stima che darà della probabilità che esca croce aumenterà insieme al numero delle teste consecutive. Questo giudizio può essere considerato accettabile ed adeguato secondo i criteri formali della teoria soggettivista, questi modo di pensare è incompatibile con "l'assenza di memoria" della moneta e quindi non è possibile che generi una dipendenza sequenziale. La coerenza interna non è sufficiente, le stime di probabilità devono essere compatibili con l'intera gamma di convinzioni dell'individuo. Purtroppo, non sempre ci sono procedure formali per valutare la compatibilità di un insieme di stime con l'intero sistema di convinzioni. Il giudizio razionale si sforzerà sempre di trovare una compatibilità, anche se l'interna consistenza è più facilmente raggiungibile: in particolare, è normale sforzarsi per far si che le proprie stime siano compatibili con la propria conoscenza della materia, le proprie leggi della probabilità e le proprie euristiche.

Capitolo 4

L'insegnamento della probabilità nella scuola italiana

4.1 Le indicazioni nazionali

Le indicazioni Nazionali per il Curricolo sono un testo di riferimento unico per tutte le scuole che sostituisce quelli che, un tempo, si chiamavano "programmi ministeriali". Il testo entra in vigore nel Novembre 2012, sostituendo sia le precedenti indicazioni nazionali. Queste, come previsto dall'autonomia scolastica, forniscono alle scuole obiettivi di apprendimento e competenze che ogni studente dovrebbe acquisire; confermano la validità dell'impianto educativo della scuola di base, ma indicano alcune necessità per garantire a tutti i ragazzi delle solide conoscenze e competenze.
Nelle Indicazioni Nazionali per l'insegnamento della matematica compare la sezione chiamata "Dati e Previsioni", a cui si riferisce la probabilità e la statistica; la società dell'informazione odierna richiede infatti abilità e competenze quotidiane alla cui base sono fondamentali insegnamenti di probabilità e statistica.

4.1.1 Primo Grado

Esaminando le Indicazioni nazionali per i Piani di studio personalizzati nella Scuola Secondaria di 1° grado, relativamente a matematica, si trovava già nella versione precedente a quella attuale:

- Fasi di un'indagine statistica;
- Tabelle e grafici statistici;
- Valori medi e campo di variazione;
- Concetto di popolazione e di campione;
- Probabilità di un evento: valutazione di probabilità in casi semplici.

Fino a pochi anni fa, queste nozioni non venivano fornite, neanche nei gradi d'istruzione superiori. Tuttavia sempre di più al giorno d'oggi, le informazioni vengono validate e trasmesse mediante studi statistici: basti pensare che anche solo per leggere e comprendere bene una pagina di giornale è necessario essere in grado di interpretare il significato di tabelle, grafici, percentuali, dati e statistiche; un altro esempio sono le previsioni del tempo, che si basano su delle interpretazioni probabilistiche che i ragazzi devono saper leggere. La pratica della statistica e della probabilità è diventata una delle condizioni per una società democratica e di conseguenza uno degli obiettivi dell'educazione (Brousseau, 1974).
Osservando più nel dettaglio le indicazioni nazionali, tra i *Traguardi per lo sviluppo delle competenze* troviamo:

- Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni;
- Riconosce e risolve problemi in contsti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza;
- Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi;
- Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta;
- Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi,...) si orienta con valutazioni di probabilità.

Negli *Obiettivi specifici di apprendimento*, nella sezione *Dati e Previsioni* si trovano le competenze che gli studenti dovrebbero acquisire, nell'ambito della probabilità e statistica:

- Rappresentare insiemi di dati, facendo uso di un foglio elettronico. In situazioni significative, confrontare dati al fine di prendere decisioni, utilizzando le distribuzioni delle frequenze e delle frequenze relative. Scegliere ed utilizzare valori medi (moda, mediana, media aritmetica) adeguati alla tipologia ed alle caratteristiche dei dati a disposizione. Saper valutare la variabilità di un insieme di dati determinandone, ad esempio, il campo di variazione;

- In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti;

- Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti.

4.1.2 Secondo Grado: Liceo Scientifico

Le Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei rappresentano la declinazione disciplinare del Profilo educativo, culturale e professionale dello studente a conclusione dei percorsi liceali. Il Profilo e le Indicazioni costituiscono, dunque, l'intelaiatura sulla quale le istituzioni scolastiche disegnano il proprio Piano dell'offerta formativa, i docenti costruiscono i propri percorsi didattici e gli studenti sono messi in condizione di raggiungere gli obiettivi di apprendimento e di maturare le competenze proprie dell'istruzione liceale e delle sue articolazioni.
Per ogni disciplina sono state redatte delle linee generali che riassumono la descrizione delle competenze attese alla fine del percorso scolastico e gli obiettivi specifici di apprendimento per ogni nucleo disciplinare.
Nelle indicazioni nazionali per i licei scientifici si trova nella sezione "linee generali e competenze":

> Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Già nelle prime righe delle linee generali e competenze, viene data grande importanza allo studio della probabilità: descrivere e prevedere fenomeni è una competenza di primaria importanza nei licei scientifici di oggi e la probabilità, insieme alla statistica, costituiscono i campi generale per la pratica delle competenze appena descritte.
Inoltre, tra i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio, si trova:

4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;

6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo

7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;

Sebbene il punto 4) non ha bisogno di ulteriori spiegazioni, possono essere necessarie per il 6) e 7): innanzitutto gli esercizi e problemi di probabilità appartengono tutti al medesimo modello (quello probabilistico), che tenta di descrivere e analizzare la stessa classe di fenomeni e il corretto utilizzo degli strumenti informatici può essere di aiuto nel momento in cui ci si vuole approcciare alla visione frequentista. Inoltre, grazie alla teoria di Kolmogorov la probabilità è una teoria assiomatica, il suo apprendimento si presta sicuramente molto bene all'apprendimento della forma moderna di questo tipo di teorie, anche solo per dare una versione differente dalla geometria euclidea classica.
Continuando ad analizzare le Indicazioni Nazionali per i licei, in questo caso scientifico, nello specifico tra gli Obiettivi Specifici di Apprendimento, nella sezione "Dati e Previsioni':

> Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi

> e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti. Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici. Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica. Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

Già nel primo biennio si ritiene formativo l'apprendimento della probabilità, concettualmente e analizzando esempi che ne facciano capire l'essenza.
Nel corso degli studi si approfondisce sempre di più l'argomento, analizzando situazioni sempre più complesse, come riportano gli Obiettivi Specifici per il secondo biennio:

> Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione. Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni,nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio. In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.

E per quanto riguarda il quinto anno:

> Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson). In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell?ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

É doveroso sottolineare un aspetto molto importante degli obiettivi: il fatto che la probabilità e sopratutto la statistica permettono di sviluppare il più possibile collegamenti con le altre discipline, fattore che (escluso forse il caso della fisica) gli altri campi della matematica non riescono a fare in modo così completo. Questi particolari insegnamenti si prestano molto bene alla "interdisciplinarità", sopratutto per abbattere quel muro (molto spesso immaginario) tra area scientifica e area umanistica.
L'apprendimento probabilistico si presta perfettamente a essere coniugato nei vari aspetti che danno origine a un apprendimento completo, risultando così squisitamente formativo del pensiero (Fandiño Pinilla, 2008).

4.2 Il problema nelle scuole

Da qualche anno le disposizioni dell'istruzione secondaria di secondo grado hanno inserito l'insegnamento della probabilità e statistica in tutte le tipologie di scuole superiori. Tuttavia, ciò ha creato alcuni problemi pratici, in particolare tra i docenti.
Fino a qualche anno fa gli studi universitari seguiti dagli insegnanti di matematica non prevedevano corsi di statistica, perciò i professori non hanno avuto modo di conoscere la materia in sé, né hanno vissuto un'esperienza diretta da studenti. Un ragionamento analogo si può fare sulla probabilità e la sua didattica. La mancata tradizione degli ambiti di probabilità e statistica all'interno degli istituti italiani fa sì che vi sia un problema nel suo insegnamento.
Per gli insegnanti è altresì importante possedere una personale opinione sugli argomenti che vengono insegnati, sia per evitare l'insorgere di misconcezioni, sia per il fatto che chi non conosce un argomento, difficilmente è ben disposto a studiarlo ed approfondirlo, trasmettendo quindi questa scarsa motivazione agli studenti. Risulta quindi fondamentale che gli insegnanti siano competenti in statistica e probabilità, ed anche grazie ai loro rapporti reciproci con gli altri nuclei della matematica riescano a coglierne l'essenza e trovare passione nel loro insegnamento.
Uno studio dell'International Association for Statistical Education e dell'International Committee on Mathematical Instruction (Batanero et al. 2011) presenta alcune conclusioni riguardo tre temi didattici fondamentali sull'ar-

gomento: insegnamento della statistica a scuola; attitudini, atteggiamenti e conoscenze degli insegnanti; formazione in statistica degli insegnanti di matematica.
Nella scuola secondaria, la statistica viene insegnata solitamente da insegnanti che possono essere stati formati o meno all'insegnamento della materia. Tuttavia, molti insegnanti di matematica non si considerano né preparati ad insegnare la statistica, né ad affrontare le difficoltà incontrate dai propri studenti; nella ricerca sopra citata, sono state evidenziate difficoltà e misconcetti di futuri insegnanti anche riguardo le idee fondamentali. Inoltre, sono pochi i corsi in grado di formare adeguatamente gli insegnanti: sono molto pochi i futuri insegnanti della secondaria che ricevono una preparazione pedagogica adeguata sullo sviluppo del pensiero statistico e la situazione peggiora per gli insegnanti della primaria, dei quali solo pochi hanno una minima formazione in statistica.
Proprio riguardo a quest'ultimo punto, gli insegnanti della primaria sono poco formati negli ambiti di probabilità e statistica e quindi difficilmente propongono in classe attività di questo tipo: in generale si considera la materia fuori dalla sfera euristica degli allievi. Questo atteggiamento non è sicuramente benefico per gli studenti, che sviluppano immagini mentali concernenti il concetto di probabilità già a partire dalla scuola dell'infanzia: scommettono, valutano i rischi prima di decidere, credono nella fortuna/sfortuna, stimano probabilità in modo soggettivo, ecc. Se tutto ciò non è accompagnato da un intervento educativo della scuola, può facilmente generare misconcezioni che col passare del tempo si radicano e diventano modelli parassiti, quindi tali da inibire nuovi apprendimenti (D'Amore, 1999).
La scuola odierna attribuisce una maggiore importanza all'apprendimento algoritmico piuttosto che all'apprendimento concettuale: gli stessi studenti sono più preoccupati del sapere "come fare" le cose piuttosto del "perchè". La capacità di eseguire un algoritmo, se non sostenuta da una comprensione concettuale, si dissolve facilmente e traballa nel momento in cui viene messa a prova da un ostacolo imprevisto. L'apprendimento concettuale va costruito nel tempo: per l'insegnamento della probabilità e per raggiungere un primo livello di competenza è necessario l'intero ciclo scolastico dell'obbligo.
Conoscere in modo adeguato la probabilità e la statistica diventa sempre più importante, dovendosi confrontare quotidianamente con questioni basate su

dati statistici; le inferenze statistiche proposte dai media sono relativamente azzardate o volutamente falsate, approfittando dell'ignoranza della gente comune. Un esempio concreto può essere quello delle previsioni meteorologiche, ma ci si può estendere fino agli indici di gradimento sui programmi televisivi, opinioni su temi d'attualità, proiezioni dei risultati delle votazioni politiche, test sui medicinali e via dicendo. Tutte queste riflessioni portano ad una ovvia conseguenza: il cittadino che partecipa alla vita sociale e politica in uno stato democratico non può fare a meno di concetti basilari legati al calcolo delle probabilità. Ecco quindi che si impone una prima necessità: educare al concetto di probabilità i giovani della scuola obbligatoria. (Arrigo, 2014)
Non cominciare con l'insegnamento della probabilità fin dai primi anni è inoltre un aspetto che sicuramente non favorisce l'apprendimento negli anni futuri: per esempio, la geometria e l'aritmetica vengono insegnate fin dai primi anni d'istruzione, accumulando esperienze fondamentali, per poi formalizzarle in modelli adeguati, nella scuola di secondo grado. Per quanto riguarda la probabilità, accade molto spesso che queste non vengano insegnate prima delle superiori, venendo così a mancare un terreno fertile su cui costruire solide competenze. Per i professori e, purtroppo, molto spesso anche per i docenti universitari è molto difficile costruire un modello formale senza potersi appoggiare ad una esperienza precedente.
Introdurre la probabilità e statistica fin dai primi livelli d'istruzione non è solo possibile e opportuno, ma addirittura necessario. La probabilità, già dal secondo ciclo della scuola primaria, può aiutare nell'acquisizione di un modo di pensare diverso da quello deterministico. Per arrivare a questo scopo così ambizioso, è assolutamente necessario che gli insegnanti siano adeguatamente formati: è essenziale che abbiano una chiara comprensione del concetto, che acquisiscano una certa esperienza nel creare situazioni probabilistiche corrette e idonee allo sviluppo mentale dei loro allievi, che diventino abili e attenti nel rilevare misconcezioni e saper agire per trasformarle in immagini mentali corrette.

Capitolo 5

I livelli di Van Hiele

La teoria dei coniugi Van Hiele (Pierre e Dina) è stata elaborata per valutare lo sviluppo dell'apprendimento in geometria ma le sue proprietà possono essere applicate in forma più generale per una struttura teorica per comprendere i processi di apprendimento. Nella loro teoria hanno cercato di individuare dei veri e propri livelli di sviluppo.
Oltre a descrivere i livelli di sviluppo geometrico, i Van Hiele hanno anche individuato alcune proprietà del modello:

a. La proprietà *sequenziale.* Come nella gran parte delle teorie dello sviluppo, il passaggio da un livello all'altro avviene nell'ordine proposto dal modello. Per passare al livello successivo è indispensabile che lo studente abbia acquisito le competenze del livello precedente.

b. La proprietà del *passaggio tra i livelli.* I progressi da un livello al successivo dipendono non tanto dall'età ma dall'educazione. L'assenza dell'istruzione formale non consentirebbe alcuno sviluppo, pertanto sono fondamentali i metodi di insegnamento, ricordando che alcuni favoriscono il passaggio ad un livello successivo mentre altri lo impediscono. Il processo di apprendimento e quindi il passaggio tra i vari livelli, è legato indissolubilmente all'istruzione e può quindi essere accelerato con le giuste strategie.

c. La proprietà *intrinseca ed estrinseca.* L'oggetto di interesse di un dato livello diventa oggetto di studio del livello successivo. Al primo livello si possono percepire delle proprietà di un oggetto o una situazione/problema, ma possono essere comprese ed analizzate solo al secondo livello.

d. La proprietà *linguistica.* Ogni livello ha un uso specifico del linguaggio, corretto all'interno del livello stesso ma deve essere ampliato nel livello successivo.

e. La proprietà della *discrepanza.* Il tipo di educazione fornita deve essere coerente con il livello dello studente; se viene fornita un'istruzione troppo difficile, che si colloca ad un livello più alto, lo studente incontrerà difficoltà nel seguire i procedimenti spiegati dall'insegnante. Infatti, due persone che ragionano a due diversi livelli hanno difficoltà nel comprendersi. Questo situazione è ricorrente tra insegnante e studente, in cui quest'ultimo non riesce a comprendere il percorso mentale del suo professore e viceversa. Perciò, lo studente tenda a uniformare il suo pensiero a quello dell'insegnante e così dispongono senza consapevolezza e padronanza della stessa rete di conoscenze dell'insegnante, costruendo una serie di concetti non fondata su esperienze personali e che difficilmente ricorderà a lungo termine.

5.1 I livelli di apprendimento della Geometria

Nello specifico campo della geometria, i Van Hiele hanno cercato di individuare dei veri e propri livelli di sviluppo (Can Hiele, 1967; Crowley, 1987) tenendo conto delle proprietà sopra elencate:

1. *Livello Visivo*: I bambini riconoscono le forme, ma non possono rappresentarle mentalmente, ovvero non sono in grado di creare delle immagini mentali delle forme geometriche.

2. *Livello Descrittivo-Analitico*: I bambini iniziano a riconoscere le figure in base alle loro proprietà. Le immagini perdono importanza rispetto ai loro attributi, ma le proprietà non sono ancora ordinate e i ragazzi non sono in grado di differenziarle in termini di definizioni e proposizioni

3. *Livello delle Deduzioni Informali* Si cominciano ad osservare le varie relazioni tra le figure dal punto di vista logico, ad esempio il quadrato è un rettangolo perché soddisfa tutte le sue proprietà. Esiste perciò

una terminologia specifica, in modo da riuscire a distinguere le classi di figure e dedurne le proprietà.

4. *Livello Deduttivo*: i ragazzi cominciano ad essere in grado di distinguere formalmente tra una proposizione e la sua inversa e possono capire le dimostrazioni, i postulati, gli assiomi ed i teoremi. Il pensiero si occupa del significato di deduzione, del reciproco di un teorema, della condizione necessaria e sufficiente.

5. *Livello del Rigore Geometrico*: Si apprende la geometria non-euclidea e si confrontano diversi sistemi di assiomi e la geometria è rappresentata in modo astratto.

5.2 I livelli di apprendimento della Probabilità

A partire da quanto riportato sui livelli di Van Hiele per la geometria e sulle proprietà necessarie per ottenere dei livelli coerenti, si è cercato di stilare equivalentemente dei livelli di apprendimento per la probabilità. Facendo riferimento anche a quanto riportato da Fischbein sull'intuizione e sull'istruzione e dovendo basare la ricerca su studenti dalla terza media alla seconda superiore (liceo scientifico) il livello di partenza è un livello base, in cui solo l'intuizione primaria possa essere il parametro di valutazione della loro competenza fino ad un livello non troppo alto di apprendimento, senza che quindi rientrino i concetti di probabilità condizionata o di funzioni di ripartizione. La ricerca è stata strutturata per valutare 3 aspetti che sono fondamentali nell'apprendimento della probabilità:

1. Concezione;

2. Linguaggio;

3. Proprietà;

Quando si spiega la probabilità in classe si va verso un tipo di concezione definita "anti-intuitivo", nel senso che quando si affrontano problemi di questo ambito, si usano strategie risolutive che non sono proprie della matematica classica, perché si affrontano situazioni di incertezza. Nella probabilità inoltre si introduce anche un lessico specifico, espressioni come "probabile, casi favorevoli/possibili, evento, etc" non si usano nel linguaggio comune e nella

matematica classica; questo linguaggio è molto importante perché grazie a questo ci si orienta in modo preciso e puntuale nell'argomento. É altresì importante condurre una riflessione sull'aspetto delle proprietà: parlando di situazioni probabilistiche si usano proprietà che non vengono mai usate prima, ma che qualche studente potrebbe, inconsciamente, aver acquisito o utilizzare, senza che siano state affrontate in classe.
Tenendo conto di tutto ciò, sono stati elaborati tre livelli di apprendimento:

- LIVELLO A:
  - Intuizione Primaria (Affettiva)
  - Linguaggio Comune
  - Nessuna Proprietà
- LIVELLO B:
  - Passaggio da intuizione a ragionamento
  - Alcuni termini specifici del campo delle probabilità
  - Proprietà relative alla definizione classica
- LIVELLO C
  - Concezione relativa ad un modello probabilistico
  - Appropriazione linguaggio
  - Proprietà sulle operazioni algebriche, immagine dell'algebra degli eventi

Alcuni commenti sono d'obbligo a questa divisione, prima di spiegarla più nel dettaglio: nel livello A, quando si parla di intuizione primaria e affettiva si intende proprio l'intuizione primaria definita da Fischbein, ovvero quella relativa alle esperienze che si fanno quotidianamente, quindi anche relativa all'affettività, ovvero a tutti i vissuti, ricordi che caratterizzano una persona. Nel livello B questa componente si tende ad abbandonare, fidandosi sempre di meno delle proprie intuizioni e cercando invece di usare la ragione, anche se è ancora l'intuizione che tenta di spingere verso la risposta che si cerca. Nel livello B si cominciano ad usare alcuni termini specifici ma ciò che si ha in più nel livello C è *l'appropriazione* del linguaggio.
Il termine *l'appropriazione* è stato introdotto da Bakhtin, filosofo e critico

letterario russo, in linguistica per descrivere quel processo utilizzato da un soggetto per adattare una "parola che vive nel mondo di altri" al suo mondo personale, circondando la parola con intenzioni, accenti e obiettivi:

> Una parola diventa "propria" solo quando chi parla la arricchisce con le sue intenzioni, con il suo accento, quando si appropria della parola, adattandola alle sue intenzioni semantiche ed espressive. Prima di questo momento di appropriazione, la parola non esiste in un linguaggio neutrale ed impersonale(dopotutto, non è che chi la usa la tira fuori da un dizionario!), ma piuttosto esiste nella bocca delle altre persone, nei contesti, a seconda delle proprie intenzioni: è da lì che si deve imparare la parola e farla propria. (Bakhtin, 1981, pp.293-4).

Una persona si è appropriata del linguaggio nel momento in cui un insieme di parole vengono ripetute più volte e sono collegate tra loro da un'idea propria, autentica, diversa da studente a studente (anche se l'ambito è lo stesso) e le scelte linguistiche e anche il tono di voce non è "preso in prestito" da nessun altro.
Ecco come possono essere descritti i livelli di apprendimento della probabilità secondo il quadro teorico di Van Hiele:

LIVELLO A : La probabilità non è un concetto matematico, ma più un'idea relativamente a situazioni comuni, per esempio le percentuali, previsioni del tempo. Gli studenti non sono in grado di spiegare il significato di situazioni probabilistiche o che cosa si intenda anche con "più o meno probabile". Il linguaggio di riferimento è quello comune, legato al vissuto, all'esperienza, più che altro relativo alle possibilità che qualcosa accada. Non ci sono proprietà matematiche emergenti, né si comprende il significato di unione o intersezione di eventi in termini probabilistici.

LIVELLO B : A questo livello la probabilità è un concetto matematico abbastanza fondato, il calcolo e l'analisi sono finalizzate alla probabilità che un fenomeno si verifichi o per calcolare le possibilità. In questo ambito, sono definiti certi termini del modello probabilistico classico. Si comincia a capire il modo in cui approcciarsi a situazioni probabilistiche e come questo possa essere schematizzato mediante diverse rappresentazioni (insiemi, grafi, tabelle), dalle quali si possono estrapolare certe proprietà.

LIVELLO C :Il significato della probabilità elementare è compreso pienamente.Alla base di questa comprensione c'è un più ampio modello probabilistico, ovvero lo studente riesce a capire che situazioni che si sono verificate nella soluzione di un esercizio si verificano anche in altri problemi. Lo studente comprende che la probabilità che un evento si realizzi indica una sorta di aspettativa di ciò che dovrebbe (non potrebbe) accadere. Il linguaggio è tecnico, schematizzato e relativo agli eventi (anche solo ad un'immagine mentale di essi), usato poi per esprimere le proprietà matematiche a partire dall'algebra degli eventi, che diventano il punto di partenza dell'analisi delle situazioni.

Lo studio che seguirà è finalizzato prima di tutto alla validazione di questi livelli ed eventualmente alla loro correzione. Per fare ciò, sono state intervistate alcune classi a diverso grado d'istruzione, cercando degli indicatori che permettessero di capire a che livello di apprendimento gli studenti si collocano.

Capitolo 6

Il progetto: Il Questionario

6.1 Analisi a Priori

Dopo aver definito quelli che si ipotizzano essere dei livelli di apprendimento della probabilità, si sottopongono a verifica con una sperimentazione. Uno dei presupposti della ricerca è dare un possibile approccio su come degli ipotetici livelli di apprendimento possano essere verificati. Per fare ciò, sono state contattate alcuni insegnanti provenienti da diversi istituti, per sottoporre gli studenti ad un test, un questionario che potesse dare più informazioni possibili su alcuni approcci tipici dell'ambito probabilistico; i ragazzi sono stati sottoposti prima al test e alcuni successivamente intervistati.
In questa prima fase di correzione del questionario, le risposte sono state tabulate, assegnando dei valori che dessero un risultato complessivo del test, per capire in che modo le varie classi risolvessero i diversi quesiti. I dati riportati sono stati analizzati, sia a livello globale del test in generale, sia quesito per quesito; in seguito, sono state tratte alcune conclusioni e osservazioni, per avere un'idea chiara della preparazione delle singole classi.

6.1.1 Descrizione della popolazione

La sperimentazione è stata fatta su 4 classi di 3 istituti:

- Istituto Comprensivo Valle del Conca, Morciano di Romagna (RN), due classi di terza secondaria di primo grado;
- Liceo Scientifico Niccolò Copernico, Bologna (BO), classe prima di secondaria di secondo grado;

- Liceo Scientifico-Artistico Volta-Fellini, Riccione (RN), classe seconda di secondaria di secondo grado (indirizzo scientifico).

Nell'Istituto Comprensivo Valle del Conca sono state prese in esame due classi: una è stata la 3°D, in cui erano presenti 16 studenti al momento della sperimentazione. L'insegnante non aveva mai affrontato argomenti di probabilità e statistica. L'intervista non è stata svolta nell'intera classe ma solo su 10 studenti.
Nella classe 3°B, in cui su 18 studenti ne sono stati intervistati 12, l'insegnante aveva già affrontato l'argomento, come segue:

- spazio campionario;
- eventi e spazio degli eventi;
- definizione classica di probabilità;
- unione ed intersezioni di eventi;
- somma e prodotto di probabilità;
- grafi e tabelle;
- esercizi ed esempi;

Nella classe 1°C del liceo di Bologna e 2°I del liceo di Rimini sono stati sottoposti al questionario rispettivamente 20 e 23 ragazzi, tra i quali gli intervistati sono stati 14 e 16. In entrambe le classi gli insegnanti non avevano ancora affrontato la probabilità e solo alcuni di questi avevano trattato alcuni elementi di statistica nei gradi d'istruzione precedenti.

6.1.2 Descrizione del questionario

Qui di seguito si riporta il questionario, così come è stato proposto alle classi. Le domande sono state scelte quasi tutte (tranne il Quesito 4) da vecchi quesiti Invalsi e articoli di ricerca, in modo che siano già state somministrati e valutate, per avere un'idea precisa di cosa aspettarsi dall'andamento globale.
Nella somministrazione del questionario i ragazzi sono stati messi il più possibile a loro agio, concedendogli l'uso della calcolatrice, in modo che si potesse effettivamente valutare le loro competenze di probabilità, senza la

preoccupazione che potessero sbagliare qualche conto. Il tempo per risolverlo è stato valutato in circa 30 minuti, ma non è stata data una scadenza entro cui consegnare perché era preferibile che finissero il compito per poter raccogliere più materiale possibile ed evitare ansia da consegna entro un tempo stabilito. I banchi non sono stati separati, per non creare l'atmosfera da compito in classe e il più possibile si è preferito interagire con loro con leggerezza, per epurare il più possibile l'ambiente da sintomi di contratto didattico, chiedendo piuttosto il loro aiuto per il miglior svolgimento possibile del progetto.

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

TEST PROBABILITÁ

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Nome ....

Cognome ....

QUESITO 1

In una stanza vi sono 3 tavoli. Su ciascuno vi sono due scatole chiuse, una bianca e l'altra nera, nelle quali si mettono caramelle di liquerizia e di menta. Al giovane Pierino piacciono molto le caramelle di liquerizia, ma odia la menta.

TAVOLO 1
Contenuto della scatola bianca: 50 caramelle di liquerizia e 60 caramelle di menta.
Contenuto della scatola nera: 30 caramelle di liquerizia e 40 caramelle di menta.

Domanda 1:
Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera?

TAVOLO 2:
Contenuto della scatola bianca: 60 caramelle di liquerizia e 30 caramelle di menta.
Contenuto della scatola nera: 90 caramelle di liquerizia e 50 caramelle di menta.

Domanda 2:
Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera?

TAVOLO 3: Ora il contenuto delle due scatole bianche dei tavoli 1 e 2 viene versato nella scatola bianca del tavolo 3 e il contenuto delle scatole nere dei tavoli 1 e 2 viene versato nella scatola nera del tavolo 3.

Domanda 3
Pierino vuole prendere a caso una caramella da una scatola. Pensi che sia meglio che la prenda dalla scatola bianca o da quella nera?

QUESITO 2

Per scegliere chi deve lavare i piatti del pranzo, Marco, Lorenzo e Livia decidono di lanciare due volte una moneta da 1 euro come quella che vedi in figura:

Testa **Croce**

Stabiliscono che:

1. se verranno 2 croci, laverà i piatti Marco;
2. se verranno 2 teste, laverà i piatti Livia;
3. se verranno una testa e una croce, laverà i piatti Lorenzo.

a. Pensi che tutti e tre abbiano la stessa probabilità di lavare i piatti?

☐ Si

☐ No

b. Giustifica la tua risposta.

....
....
....

QUESITO 3

Un dado non truccato è stato lanciato 70 volte di seguito. La seguente tabella riporta la frequenza con cui ciascun numero è uscito.

Numero uscito	Frequenze
1	11
2	10
3	11
4	16
5	9
6	13

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

		V	F
a.	Poichè il 5 è uscito meno volte, la probabilità che esca 5 nel lancio successivo è maggiore rispetto agli altri numeri	☐	☐
b.	Poichè il 4 è uscito più volte, la probabilità che esca 4 nel lancio successivo è maggiore rispetto agli altri numeri	☐	☐
c.	La probabilità che esca 5 nel lancio successivo è uguale a quella che esca 4	☐	☐

QUESITO 4

Si gettano due dadi.

Qual'è la probabilità di ottenere che la somma dei risultati sia 7?

Esponi il tuo ragionamento utilizzando il metodo che preferisci (con le tue parole, calcolando, con un disegno o un grafico, etc.)

QUESITO 5

Nel sacchetto A ci sono 4 palline rosse e 8 nere, mentre nel sacchetto B ci sono 4 palline rosse e 6 nere.

a. Completa correttamente la seguente frase inserendo al posto dei puntini una sola delle seguenti parole:

più	meno	ugualmente

Estrarre una pallina rossa dal sacchetto A è .... probabile che estrarre una pallina rossa dal sacchetto B.

b. Giovanni distribuisce fra i due sacchetti altre 6 palline rosse, in modo che la probabilità di estrarre una pallina rossa sia la stessa per entrambi i sacchetti. Quante palline rosse ha aggiunto Giovanni in ciascuno dei due sacchetti?

Risposta: Sacchetto A: ....
Sacchetto B: ....

6.1.3 Commento alle domande

Le domande sono state scelte secondo alcuni criteri: ognuna di queste serve a valutare diversi aspetti della probabilità (definizione classica, equiprobabilità, significato delle frequenze, etc), per avere un panorama il quanto più possibile ampio e concreto delle competenze di ciascuno studente. Fin dall'inizio l'aspettativa era che alcune domande risultassero più facili (in particolare i quesiti 3 e 5), aspettandosi quindi di ottenere un'alta percentuale di risposte corrette, altre invece sono di più difficile interpretazione (quesito 4), in modo che gli studenti potessero confrontarsi con varie tipologie di diversa difficoltà.

QUESITO 1:

Questa domanda è stata estrapolata da un articolo di ricerca (Bagni, Perelli D'Argenzio e Rigatti Luchini, 1999) pubblicato sugli Atti del Convegno del Cairo.
Questo problema è un ottimo esercizio per verificare la concezione di probabilità dei ragazzi esaminati: la richiesta del problema fa fronte ad un problema reale piuttosto che ad un esercizio scolastico, anche la domanda è rivolta direttamente allo studente ("Pensi che sia meglio...") e non è mai scritta la parola probabilità. L'attenzione di questo problema è quindi spostata sul soggetto piuttosto che sull'oggetto, chiede di fare una scelta, non di calcolare qualcosa; il calcolo è piuttosto il mezzo con cui il problema può essere risolto, ma non la soluzione del quesito. Anche ai ragazzi che hanno affrontato la probabilità, dinanzi ad una richiesta non esplicita di usare la probabilità, l'intuizione primaria o affettiva può prendere il sopravvento sull'istruzione scolastica.
La ricerca sopra citata è stata fatta su un campione di 52 studenti di 16-17 anni, del terzo anno di un Liceo Scientifico di Treviso, che non avevano mai affrontato la probabilità in classe. I risultati hanno mostrato che sebbene la maggior parte dei ragazzi abbia risposto correttamente alle prime due domande (rispettivamente 73% e 82%), la maggior parte degli studenti cade sulla terza, con una percentuale di risposte corrette del 23%. Nell'articolo si sostiene che la causa principale sia di tipo affettivo: dato che le scatole bianche sono risultate "vincenti" nelle prime due situazioni, tendono a scegliere quella bianca anche nel tavolo 3, sbagliando. Gli studenti, anche

se dimostrano di saper applicare la definizione classica di Laplace, di fronte all'operazione del mescolamento, abbandonano la logica usata fin'ora con successo e ne seguono un'altra, con radici nell'esperienza pre-scolastica.

QUESITO 2:

Questa è una domanda INVALSI, D11 del 2011 del livello 8, ovvero all'esame finale di terza media.
A differenza di quella di prima, qui viene specificato che bisogna calcolare una probabilità.
Dal framework Invalsi si trova che questa domanda appartiene all'ambito "*Dati e previsioni*"; il processo messo in gioco è "*Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare,...*
Tra le indicazioni troviamo i seguenti traguardi e obiettivi:

1. Traguardi IN -TS-XIX Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando le concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.

2. Traguardi IN - TS-XXI Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità.

3. Obiettivi IN - Ob5-40 In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili.

4. Obiettivi IN - Ob8-85 In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti.

I risultati mostrano un andamento generale piuttosto basso, con soltanto il 22,76% di risposte corrette (No con argomentazione corretta), al fronte del 63,42% di risposte errate. La domanda può sembrare ambigua in quanto non è chiaro se si devono prendere in considerazione le disposizioni o le combinazioni; la percentuale elevata di insuccesso può essere dovuto a questo

fatto oppure ad una interpretazione dell'opzione c. come "prima testa e poi croce".
Questa domanda ha una forte componente affettiva per il fatto che viene lanciata una moneta, esperimento che sicuramente è stato fatto da tutti i ragazzi in giochi di società o quando si deve prendere una decisione casuale tra due. L'aspetto che non deve essere sottovalutato è la scelta di una moneta da 1€, forse quella che più di tutte può rievocare ricordi di infanzia e con cui si ha più familiarità.

QUESITO 3:

Anche questa è una domanda invalsi, D14 del 2010, livello 8.
Questa domanda appartiene, all'interno del framework Invalsi, all'ambito "*Dati e Previsioni*, al processo *Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture,...)*.
Come Indicazioni invece si ha, tra i traguardi e obiettivi

1. Traguardi IN - TS-XXI Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità.

2. Obiettivi IN - Ob8-82 In situazioni significative, confrontare dati al fine di prendere decisioni, utilizzando le distribuzioni delle frequenze e delle frequenze relative.

3. Obiettivi IN - Ob8-85 In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti.

Anche in questa parte, la componente affettiva a un valore particolare ed importante, legato all'esperienza sopratutto dell'infanzia, grazie ai giochi con i dadi: la tentazione di rispondere facendo riferimento ad esperienze vissute è molto forte, dipende molto quali fra queste hanno caratterizzato la vita dei ragazzi in modo più significativo.
Anche se possono sembrare equivalenti, gli item a. e b. nascondono due misconcezioni diverse, ovvero ritenere più probabile l'uscita di un numero che esce spesso o invece, l'uscita di un numero che non esce da un certo tempo.
Dai dati Invalsi possiamo notare che risulta molto più diffusa la prima delle

misconcezioni sopra citate, ovvero preferire il numero che esce spesso. Si ha infatti:

item a. 79,86% risposte corrette

item b. 71,74% risposte corrette

item c. 67,75% risposte corrette

Per l'item c. si può pensare che sia la conseguenza della risposta corretta agli item a. e b. ma per esserne certi occorrerebbe controllare il dato cumulato delle risposte, ovvero la percentuale di studenti che hanno risposto sempre bene.

QUESITO 4:

Come già detto sopra, questa è l'unica domanda che non è stata presa da INVALSI o articoli di ricerca, tuttavia è un esercizio abbastanza classico per quanto riguarda la probabilità elementare e non si esclude che questo esempio possa anche essere stato mostrato nella scuola primaria.
La risoluzione di questo esercizio non è banale se non sono mai state usate tecniche risolutive tipiche della probabilità, come tabelle a doppia entrata, grafi o anche solo senza aver mai ragionato sulla definizione laplaciana. Ho lasciato che fossero liberi di usare il metodo che preferivano, con l'intenzione di accettare come risposte corrette grafici o disegni che mi mostrassero l'immagine mentale corretta e non solo la risposta classica $\frac{1}{6}$ o eventualmente $16,67\%$. In ogni caso, indipendentemente dalla risposta l'intenzione principale è di verificare il processo cognitivo messo in atto nella risoluzione durante l'intervista.

QUESITO 5:

Questa domanda appartiene sempre all'INVALSI livello 8, D4 del 2013.
Oltre all'ambito "*Dati e Previsioni*, per i processi si trova *Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture,...)* e *Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi - numerico, geometrico, algebrico - (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie*

di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo, ...)..
Per quanto riguarda obiettivi e traguardi:

1. Traguardi IN - TS-XXI Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ...) si orienta con valutazioni di probabilità.

2. Obiettivi IN - Ob8-85 In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti.

Nell'item a. la scelta del distrattore "ugualmente" potrebbe indicare una misconcezione presente di frequente nei bambini di livelli scolastici iniziali, ovvero considerare solo la frequenza assoluta come indice della probabilità del verificarsi di un evento.
Anche se questa domanda può sembrare banale per dei ragazzi di scuola secondaria di secondo grado, il non aver studiato la probabilità può portare comunque ad una confusione o a delle misconcezioni, guardando solo il numero di palline rosse. Ancora di più, nell'item b. non è così scontato arrivare ad avere, in entrambi i sacchetti, palline dello stesso colore se non sono mai stati affrontati problemi di questo tipo.

item a. 68,47% corrette, 30,75% errate

item b. 42,35% corrette, 53,81% errate

6.2 Risultati del questionario

In questa sezione si riportano i dati e le osservazioni sul questionario interviste escluse, le cui analisi sono riportate successivamente. Le valutazioni sono state fatte prima osservando l'andamento del questionario nelle varie classi e livelli di istruzione, poi analizzando i risultati domanda per domanda.
Ogni quesito ha un massimo di 2 punti, per un totale di 10, divisi come segue:

QUESITO 1 : 2 punti per tutte le risposte corrette; 1 punto per due risposte corrette su tre; 0 punti altrimenti. Per "risposta corretta" ho accettato anche senza alcuna giustificazione poiché queste verranno valutate nelle interviste.

QUESITO 2 : questa domanda è stata divisa in due parti. Nell'item a. 1 punto in caso di risposta corretta e 0 se sbagliata; nell'item b. 1 punto per una giustificazione corretta della risposta scelta, 0 altrimenti.

QUESITO 3 : 2 punti per tutte le risposte corrette; 1 punto per 2 risposte corrette; 0 punti altrimenti.

QUESITO 4 : 2 punti se viene prodotta la soluzione esatta con procedimento corretto; 0 punti se il procedimento è esatto o se non è stato svolto l'esercizio; 1 punto nel caso in cui il procedimento è corretto ma c'è un errore di calcolo.

QUESITO 5 : anche questa domanda è stata divisa in due parti e ho assegnato 1 punto per ogni item in caso di risposta corretta e 0 in caso di risposta errata.

Questi criteri sono stati scelti per dare omogeneità alla valutazione, differenziare chiaramente vari stadi di apprendimento e avere una buona idea di base per iniziare le interviste, in modo da scegliere i ragazzi in modo che non abbiano dato risposte troppo simili, per ottenere un confronto nell'intervista (che sono state fatte a coppie).
Per confrontare i risultati globalmente classe per classe, ho deciso di stabilire tre livelli di voto, che possono rappresentare con buona approssimazione le conoscenze, abilità e competenze dei Livelli descritti prima.

- Livello A: punteggio < 4;

- Livello B: punteggio $\geqslant 4$ e < 8;
- Livello C: punteggio $\geqslant 8$;

Questi livelli sono molto grossolani perché non valutano accuratamente il livello di apprendimento raggiunto per ogni ambito della probabilità di ogni ragazzo, ma sono dei buoni indicatori per vedere a livello globale l'andamento della classe, non dei singoli studenti.

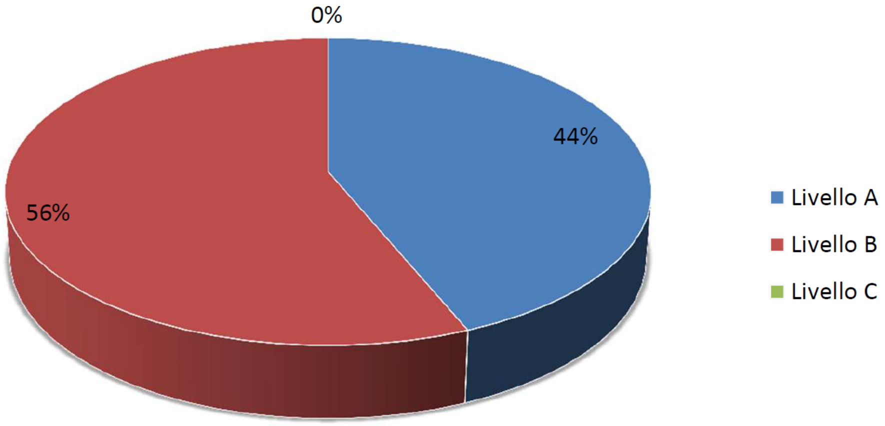


Figura 6.1: Classe 3°D

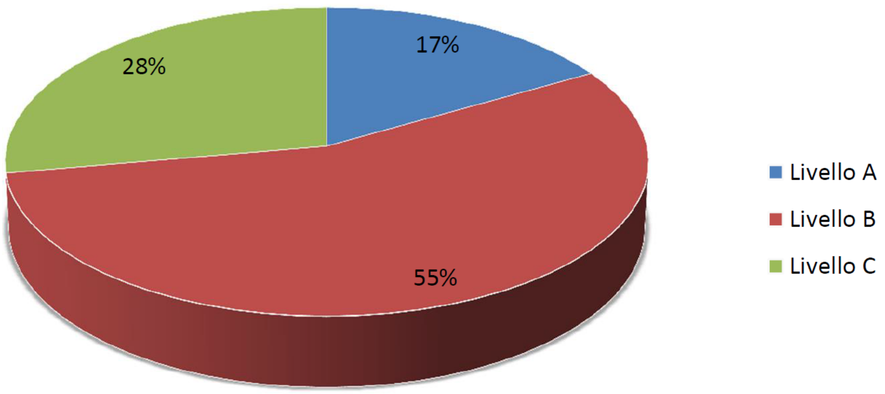


Figura 6.2: Classe 3°B

Questi primi due grafici mostrano il livello di apprendimento della probabilità delle classi terze di secondaria di primo grado, dello stesso istituto nella provincia di Rimini. Come già si era detto prima, la sezione D ha affrontato alcuni elementi di probabilità mentre la B ancora no, anche se mi sembra giusto specificare che l'insegnante era in procinto di farlo. Una prima analisi che può essere fatta è che in entrambe le sezioni gli studenti al livello intermedio B sono poco più della metà del totale, ma nella sezione più preparata si rivela un 28% di studenti (quindi all'incirca uno su tre) che appartengono al livello più alto, ragion per cui si può ritenere che l'intervento effettuato dalla professoressa ha sicuramente prodotto un buon livello di apprendimento dei processi e strategie caratteristiche della probabilità, e sopratutto alla luce del fatto che i problemi affrontati non erano mai stati proposti come esempi o esercizi si può confermare che i ragazzi hanno una buona preparazione che gli permette di risolvere molteplici situazioni di incertezza (soltanto il 14%, ovvero 3 persone sul totale di 18). I ragazzi di 3°D d'altra parte, pur non avendo mai affrontato la probabilità si equivalgono per percentuale con il numero di ragazzi dell'altra sezione, ma nessuno di questi riesce a raggiungere il livello C; aumentano invece il numero di ragazzi con un livello di conoscenze basso, ben il 44%. Tutto ciò dimostra che la preparazione dei ragazzi in altre discipline scientifiche (fino a quel livello scolastico) porta ad un apprendimento limitato, seppur discreto: per arrivare a certi livelli di competenza, la formalizzazione scolastica sembra essere fondamentale.

Confrontando questi dati si può trarre la conclusione che per arrivare ad un livello ottimo di comprensione e competenza sulla probabilità è necessario definire da un punto di vista matematico (seppur non rigoroso e formalizzato) certi oggetti e certi ambienti: una differenza del 28% nello stesso istituto (e quindi con curricoli affrontati piuttosto simili) e sopratutto il fatto che della classe 3°D nessuno sia arrivato al livello C, supporta questa tesi. É ragionevole supporre che grazie alla formulazione esplicita degli argomenti, circa la metà dei ragazzi al livello B siano riusciti a passare al livello successivo, a fare un salto concettuale; inoltre anche i ragazzi al livello A sono diminuiti di molto, raggiungendo il livello intermedio. In sostanza, un buon intervento didattico sulla probabilità può riuscire a portare lo stesso numero di ragazzi dal livello A a B che dal livello B al livello C. Il fatto che siano state esaminate due classi dello stesso istituto, attribuisce ancora più valore a questa analisi.

Affermare che l'istruzione possa aumentare il livello di analisi e comprensione di una certa materia può sembrare un'osservazione banale, anche se poi si vedrà dall'analisi dei quesiti che non è proprio così: ciononostante, si può osservare dai livelli di istruzione successivi come le competenze probabilistiche si possano acquisire, molto più lentamente, anche senza una formalizzazione diretta ed esplicita.

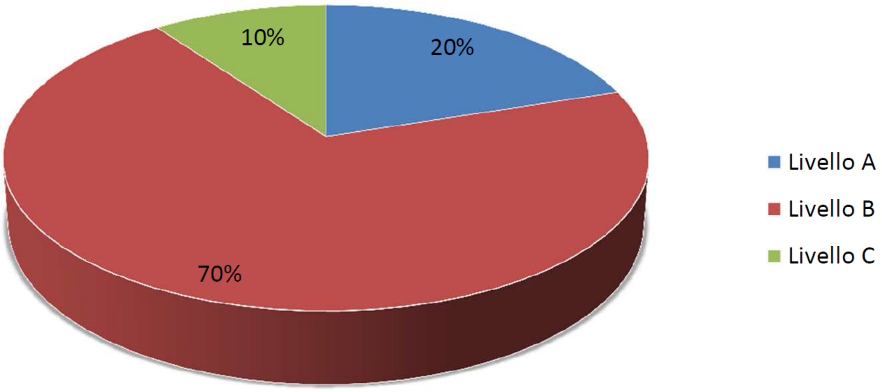


Figura 6.3: Classe 1°C

Questo grafico andrebbe confrontato con quello della 3°D, in quanto il percorso formativo della probabilità non è stato ancora affrontato in classe. Quello che si nota a primo impatto è che c'è un 10% degli studenti (perciò 2) che raggiungono il livello di apprendimento più alto, ma può essere interpretato come fisiologico del fatto che si passa ad un istituto che raccoglie (in teoria) gli studenti più competenti ed appassionati nelle materie scientifiche provenienti dagli istituti di primo grado. Dato molto più interessante è la fetta rossa, del livello B che si allarga molto, dal 56% al 70%, con un conseguente restringimento dei ragazzi al livello A, che si dimezzano. É ragionevole pensare che questo grande miglioramento sia dovuto al diverso approccio che si da allo studio e all'apprendimento della formazione di secondo grado, sopratutto della matematica, meno incentrato sulle procedure ma più su un ragionamento di tipo deduttivo, nell'ottica di riuscire a "descrivere e prevedere i fenomeni" come dicono le indicazioni nazionali. Questo "crescendo" si conferma andando a vedere il grafico relativo alla classe seconda di liceo scientifico.

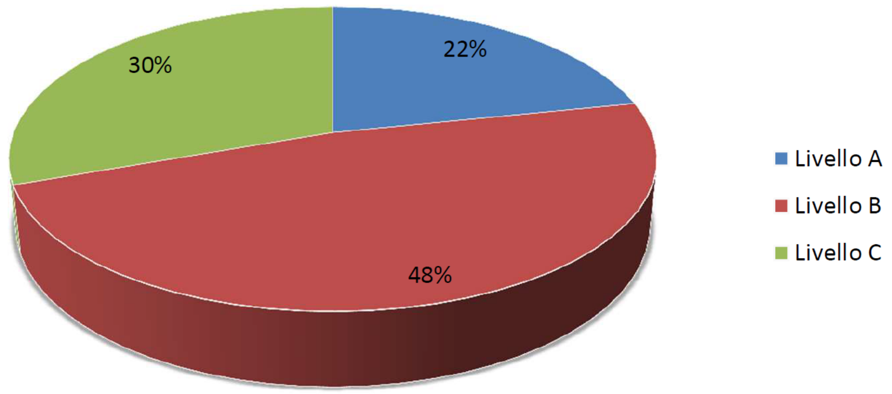


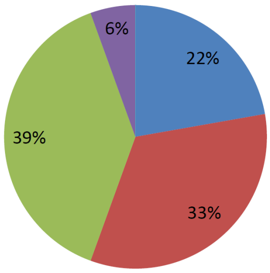
Figura 6.4: Classe 2°I

I ragazzi che raggiungono il livello più alto aumentano, arrivando anche a superare quelli che invece rimangono ancora ad un livello basso, segno che l'istruzione sta producendo effetti positivi sulle abilità degli studenti riguardo situazioni probabilistiche, anche senza che queste vengano trattate esplicitamente: da come si vedrà dalle interviste, sicuramente il linguaggio non sarà totalmente appropriato e alcune strategie risolutive specifiche non si manifesteranno (per esempio i grafi), tuttavia l'immagine mentale dei fenomeni probabilistici e una buona idea del modello della probabilità sono sviluppate e tendono ad accrescere sempre di più.
Penso sia interessante notare che quest'ultimo grafico sui livelli della classe seconda di liceo scientifico è veramente molto simile al grafico della classe di terza secondaria di primo grado che ha affrontato l'argomento in classe: almeno per la classe in esame, la cultura scientifica acquisita fino al momento della somministrazione del test è sufficiente a sviluppare nei ragazzi delle buone competenze sulla probabilità, facendo sì che emergano anche delle discrete abilità di analisi e risoluzione degli esercizi, procedure e capacità simili a quelle che si sono sviluppate negli studenti più giovani nel momento in cui vengono posti di fronte direttamente alla teoria della probabilità.

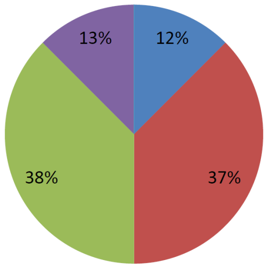
6.2.1 Risultati dei Quesiti

In questo paragrafo si riportano i dati delle risposte degli studenti quesito per quesito, sempre considerando solo il questionario e non le interviste.

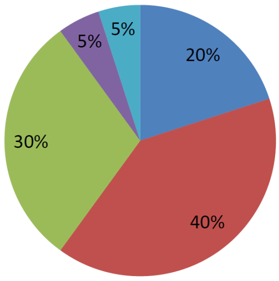
QUESITO 1



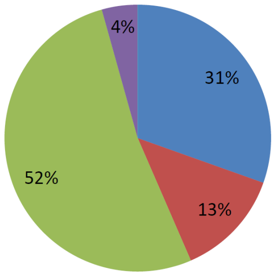
(a) Classe 3°B



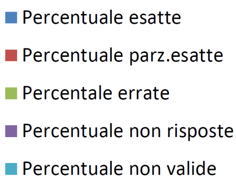
(b) Classe 3°D



(c) Classe 1°C



(d) Classe 2°I

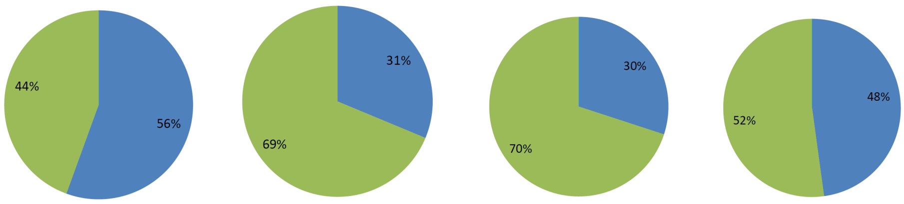


La percentuale delle risposte tra le due classi del primo grado è pressoché la stessa per quanto riguarda le risposte errate e quelle parzialmente corrette, mentre sono leggermente superiori quelle corrette da parte della sezione B: sembrerebbe che l'aver studiato direttamente la probabilità non aiuti granché a rispondere a questa domanda. Ciò può essere dovuto al fatto che nella formulazione del problema non veniva esplicitamente chiesto di calcolare una probabilità, piuttosto di fare una scelta sul tipo di scatola che

era più conveniente scegliere; questo fatto può aver portato fuori strada i ragazzi della 3°B, le cui intuizioni primarie hanno preso il sopravvento sulle conoscenze acquisite. Per le risposte parzialmente esatte, è presumibile pensare che pur analizzando correttamente il problema, gli studenti si siano imbattuti in strategie risolutive non completamente esatte.
Interessante è il dato della classe seconda di liceo scientifico: circa il 50% dei ragazzi sbagliano, ma aumenta la percentuale di risposte esatte, circa uno su tre studenti. La lettura che si può dare a questo dato è che gli studenti sono più consapevoli e sicuri delle loro risposte, quindi diminuiscono quegli studenti che, ottengono casualmente una risposta corretta, sopratutto considerando che la probabilità di avere una risposta parzialmente corretta rispondendo casualmente ad ognuna delle domande è del 50%. Il 31% degli studenti risponde correttamente e soltanto il 13% parzialmente, segno che sono tanti gli studenti che sono stati in grado di interpretare bene il problema e trovare la strategia risolutiva corretta.

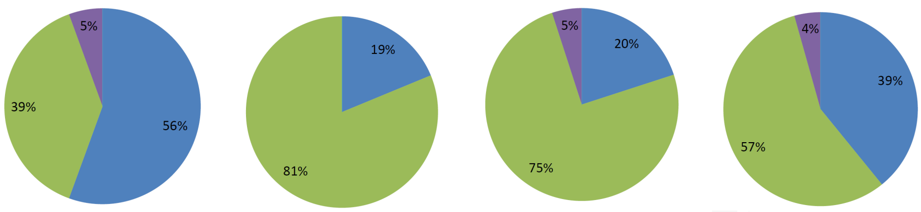
QUESITO 2

Figura 6.5: item a.

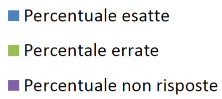


(a) Classe 3°B (b) Classe 3°D (c) Classe 1°C (d) Classe 2°I

Figura 6.6: item b.



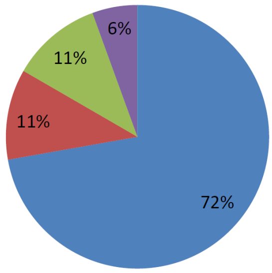
(a) Classe 3°B (b) Classe 3°D (c) Classe 1°C (d) Classe 2°I



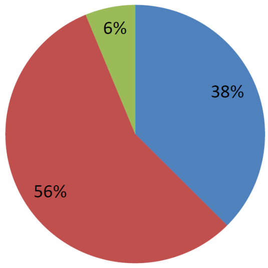
I grafici allegati mostrano che in generale che gli studenti che riescono a capire che gli eventi in questione non sono equiprobabili, sono anche in grado di fornire una giustificazione adeguata. Come c'era da aspettarsi, la classe 3°B ha avuto un andamento nettamente migliore rispetto alle altre classi: questa è una domanda classica della probabilità e gli studenti hanno sicuramente risolto degli esercizi equivalenti o che sono riferiti allo stesso tipo di modello e strategia risolutiva, infatti gli studenti che hanno risposto bene ad un item, hanno fatto bene anche l'altro.
Per quanto riguarda le altre classi c'è sicuramente un po' più di differenza tra la prima e la seconda domanda sia per non essere riusciti a trovare giustificazioni adeguate, sia dovuto al fatto di scegliere molto soggettivamente o casualmente una delle due risposte possibili dell'item a. e poi tentare di

trovare una giustificazione quantomeno plausibile per la scelta effettuata: questo tipo di strategia può risultare vincente nell'item a. ma sicuramente non nella seconda domanda, dove viene richiesta una giustificazione sensata. Come è stato detto nel capitolo precedente, i risultati Invalsi nel 2011 sono stati del 22,76% di risposte esatte, valutati alla fine del percorso formativo secondario di primo grado: questi risultati sono compatibili con quelli riscontrati nel test, assestandosi al 19% della terza, 20% della prima fino a crescere fino al 39% in seconda liceo. Nelle scuole italiane esiste tutt'ora il problema del faticoso inserimento nei programmi della probabilità, della formazione docenti sull'argomento e anche del reperimento di manuali adeguati. Questo specifico campo della matematica si sta inserendo nei curricoli lentamente e nel 2011 poche classi del primo grado affrontavano l'argomento. Da questi risultati si chiaramente bene come l'apprendimento esplicito della probabilità è fondamentale nella risoluzione di questo tipo di esercizi.

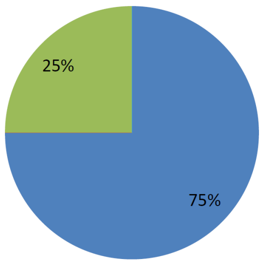
QUESITO 3



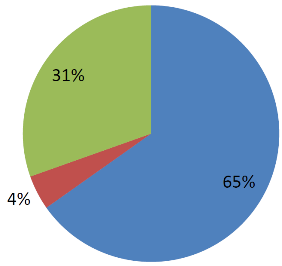
(f) Classe 3°B



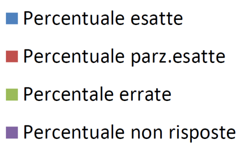
(g) Classe 3°D



(h) Classe 1°C



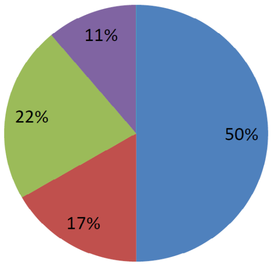
(i) Classe 2°I



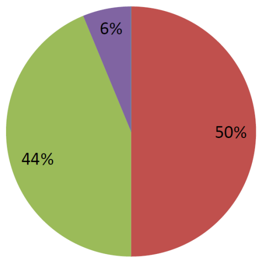
In questa domanda si può osservare che nelle classi di liceo non ci sono praticamente risposte parzialmente inesatte (nessuna nella prima e il 4% nella seconda): questo dato è dovuto alla scelta di assegnare un punto nel caso di due risposte corrette su tre, ma se uno studente ha una misconcezione che l'ha portato a sbagliare una delle prime due e questa è ben radicata è assai probabile che sbagli anche il terzo item. Ciononostante gli studenti del liceo mostrano in generale di essere all'altezza di questo problema e di saper analizzare bene le frequenza del lancio di un dado.
I dati sui ragazzi di 3°D, quelli che ancora non sono stati istruiti sulla probabilità, mostrano che la maggioranza degli studenti sbagliano una sola delle risposte, fatto dovuto forse al considerare le domande singolarmente: in ogni caso, il dato mostra che sicuramente sono presenti delle misconcezioni dovute all'analisi delle frequenze(tipo gambler's fallacy).

Rispetto i risultato Invalsi del 2009 i ragazzi si sono dimostrati all'incirca sugli stessi livelli (ad eccezione della 3°D), anche se un'analisi di questo tipo non può essere considerata troppo accurata perché l'Invalsi non riporta i risultati cumulati.

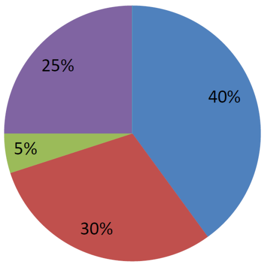
QUESITO 4



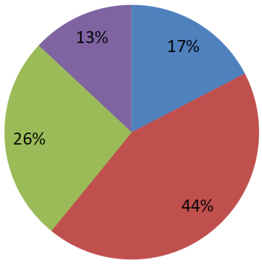
(k) Classe 3°B



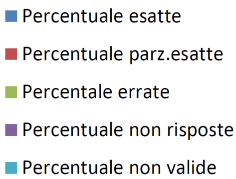
(l) Classe 3°D



(m) Classe 1°C



(n) Classe 2°I

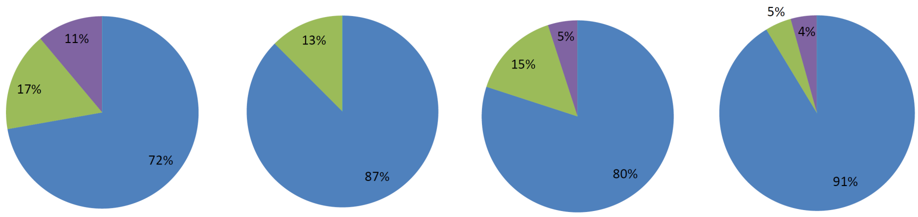


Essendo questa un'altra domanda classica della probabilità ed essendoci una richiesta esplicita di calcolarla, la 3°B risulta essere la classe migliore tra le quattro con il 50% di risposte corrette e circa il 22% dimostrano comunque una buona capacità di analisi del problema, anche se poi si trovano in difficoltà a dare una soluzione, sbagliando a calcolare i casi favorevoli o possibili oppure contando solo una volta le combinazioni ripetute. Chi ha avuto una buona istruzione in questo tipo di domande si ritrova decisamente avvantaggiato e ciò si vede anche dai risultati della 3°B in cui nessuno riesce a dare una risposta completamente corretta. Tuttavia il 50% riescono degli studenti a dare una buona idea iniziale di come si dovrebbe fare a risolvere il problema, magari pensando ai modi in cui si può sommare sette e a quanti

sono i possibili risultati del lancio di due dadi: per dei ragazzi di 13-14 anni che non hanno ancora intrapreso un percorso formativo sulla probabilità, può essere considerato un risultato discreto.
Diversa è invece un'analisi sui liceali: il 13% in seconda e ben il 25% in prima non provano neanche a rispondere alla domanda. Però, in prima il 40% delle persone riesce a dare la risposta completamente corretta, mentre in seconda questa percentuale scende al 17%, leggermente in controtendenza con i risultati globali del questionario: una domanda troppo libera, in cui la soluzione andava costruita dal principio può aver messo più in difficoltà i ragazzi di seconda, abituati sempre di più a risolvere un problema a partire dai dati iniziali.

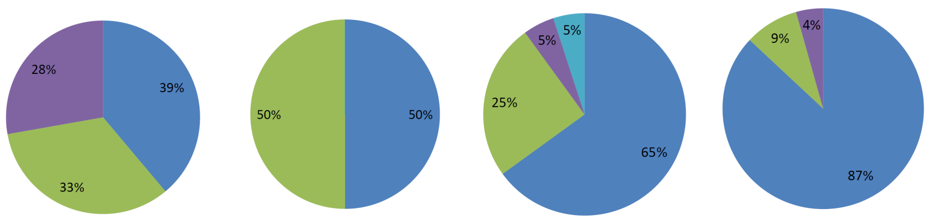
QUESTITO 5

Figura 6.7: item a.

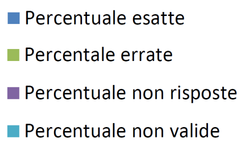


(a) Classe 3°B (b) Classe 3°D (c) Classe 1°C (d) Classe 2°I

Figura 6.8: item b.



(a) Classe 3°B (b) Classe 3°D (c) Classe 1°C (d) Classe 2°I



Dai dati appena riportati si nota che i dati per le classi di secondaria di primo grado riportano dei risultati molto simili a quelli fatti registrare nel 2013 negli Invalsi. In questo caso però la classe che ha seguito delle lezioni di probabilità ha avuto dei risultati decisamente peggiori rispetto all'altra: 72% contro 87% per l'item a. e 39% contro 50% per l'item b. Nonostante in tutte le domande abbiano risposto meglio, in questa hanno commesso più errori, perciò probabilmente la formazione dei ragazzi ha generato dei processi cognitivi che hanno creato delle difficoltà in questa tipologia di problemi: si può presupporre che nel tentativo di applicare le formule e procedure che sono stati insegnanti loro si sono trovati più in confusione rispetto al trovare una risposta semplice ma sensata, come quella di far sì che i due sacchetti abbiano lo stesso numero di palline di colori diversi.

Quindi, risolvere un problema relativamente ”semplice”, in cui aver studiato la probabilità non è fondamentale ha mostrato alcuni sintomi da ”contratto didattico”, in cui i ragazzi hanno pensato di dover utilizzare le formule apprese perché il problema trattava dello specifico ambito della probabilità; i ragazzi di 3°B, inconsapevoli di tali strategie, sono stati più liberi di pensare e ragionare alla soluzione più adeguata.
I dati del liceo mostrano un buon incremento delle percentuali corrette con l'avanzamento del livello d'istruzione: proprio perché era possibile utilizzare metodi semplici per risolvere questo problema, una comprensione sempre maggiore del metodo scientifico genera maggiori competenze anche in altri settori della matematica.

Capitolo 7

Il Progetto: Le Interviste

In questa seconda parte del progetto, l'attenzione si sposta sui singoli ragazzi piuttosto che sulla classe, per individuare i processi cognitivi messi in atto nella risoluzione dei problemi del questionario. L'idea di base è quella di verificare se i ragazzi presi in esame appartengono ad uno dei livelli elaborati a priori secondo il quadro di riferimento di Van Hiele: per confermarli, l'ideale dovrebbe essere che ogni ragazzo si possa inserire in maniera inequivocabile in un livello piuttosto che in un altro, ovvero fare sì che ci siano meno studenti possibili dei quali non è possibile stabilire a che livello appartengono.

Per procedere a questo scopo sono fondamentali le interviste, colloqui tenuti con ragazzi in coppia. Le interviste sono state svolte chiedendo ai ragazzi di mostrare il procedimento svolto di una parte o di tutti i quesiti del test, invitandoli eventualmente anche a confrontarsi fra di loro o a rispondere ad alcune domande poste: la durata di ogni intervista è stata dai 5 agli 8 minuti circa.

Lo scopo dell'intervista era, come abbiamo già detto, cercare di individuare a che livello di apprendimento un certo studente si posiziona:si è cercato di valutare i parametri stabiliti dai livelli, ovvero la *concezione* che hanno della probabilità, come la stimano, se con un calcolo o a partire dalle frequenze o in modo soggettivo; il *linguaggio*, quali sono i termini specifici che usano, come li usano e il modo in cui li collegano tra loro, come costruiscono un discorso ricco di significato; le *proprietà* specifiche della probabilità, sia se vengono utilizzate in modo esplicito sia in modo intuitivo, comprendendo cosa significhi operare con queste proprietà particolari.

Per riuscire a stabilire in modo adeguato il livello di apprendimento di ogni

studente si è cercato di individuare degli "indicatori"; con questo termine si indica qualsiasi tipo di ente che possa far capire in modo assoluto a quale livello di apprendimento si può accostare uno studente. Indicatori possono essere delle frasi, delle affermazioni, delle tecniche risolutive o degli approcci specifici ad un determinato problema, qualsiasi cosa che sia , "in grado di fornire dati rilevabili sull'andamento dell'apprendimento e sui suoi esiti" (Tornar, 2001, p.147).
Per individuare gli indicatori si sono cercate e analizzate le varie "strategie" risolutive utilizzate dai ragazzi, ovvero gli specifici passaggi utilizzati dai ragazzi per risolvere il problema, quali processi mentali e interpretazioni della probabilità sono messe in gioco. Varie strategie possono quindi essere inserite in più ampie "categorie", ognuna delle quali individua uno specifico modo di approcciarsi ad un problema nell'ambito della probabilità: sicuramente ogni categoria individua una concezione diversa (per natura, non per livello) della probabilità. Quindi, tutte le interpretazioni della probabilità che vengono dagli studenti portano ad adottare un modo di pensare (modus operandi?) simile ad ogni problema, potendosi ricondurre ad una medesima categoria; queste categorie possono a loro volta essere raggruppate fra loro per "livello di apprendimento", riuscendo così ad individuare in quale livello un ragazzo può appartenere.

7.1 Le Strategie risolutive

Dopo aver effettuato le interviste nelle modalità sopra descritte, queste sono state riportate e sottoposte ad analisi, confermando le aspettative di ritrovare risposte simili fra loro, dove i ragazzi hanno utilizzato diversi processi cognitivi ma ricorrenti, anche in classi diversi. I vari tipi di strategia scelti dagli studenti sono stati quindi catalogati per essere usati anch'essi come indicatori di uno specifico livello di apprendimento. La strategie sono state rinominate con una lettera che indica il livello a cui fa riferimento e un numero per distinguerle: qui di seguito verranno riportati degli stralci di conversazione con i ragazzi in cui appaiono le relative strategie.

QUESITO 1:

A1: *Si ritiene indifferente la scelta delle due scatole, perché si estrae una caramella a caso*

In questo caso non viene percepita la probabilità come strumento per prendere una decisione migliore su una situazione che deve ancora accadere. Un'argomentazione a questa scelta è accompagnata dal pensare che sia la fortuna, il caso o la sorte che legifera e questi termini spesso emergono nel dialogo.
Nelle prossime righe, si può trovare il modo in cui ha argomentato la sua risposta Linda, una ragazza di terza media:

> Io: Allora Linda, come hai risolto?
> Linda: Io ho messo che è uguale!
> Io: Perché hai fatto così?
> Linda: Io ho pensato che fossero tutti indifferenti perché anche se specificava che gli piacciono le caramelle alla liquirizia e odia la menta, dice una caramella a caso e non specificava il gusto.

Si capisce bene come questa ragazza ritenga che la scelta è indifferente perché questa viene effettuata a caso, pur capendo e specificando che Pierino preferisce la caramella alla liquirizia.

A2: *Viene scelta la scatola con il maggiore (o minore) numero di caramelle in totale*

A differenza di prima c'è una strategia ma non è adeguata perché riferita solo alla numerosità totale del campione. Si può osservare un altro pezzo di intervista, questa volta di Asia, 3°B:

> Io: Asia, quale hai scelto?
> Asia: Io ho messo dalla scatola nera, perché anche se ci sono sempre più caramelle alla menta in tutte due le scatole, però ci possono essere più probabilità nella scatola nera perché le caramelle sono di meno.
> Io: Prova a spiegarti meglio: è più facile beccare quella alla liquirizia perché quali caramelle sono di meno?
> Asia: Allora, se io ho tante caramelle in totale, è più difficile prendere quella alla menta.

A3: *Viene sovrastimato il vantaggio dato da una maggiore quantità di caramelle "vincenti"*

Lo studente che sceglie questo tipo di strategia ritiene che rispondere così sia corretto perché concentra la sua attenzione solo sul tipo di caramelle che deve pescare per "vincere", trascurando il numero di quelle che invece non deve pescare. Nella seguente conversazione Armando, un ragazzo di seconda Liceo, argomenta così:

> Armando: Io dico scatola bianca, perché ci sono più di liquirizia e quindi più probabilità rispetto a 30, infatti sono 50.
> Io: Sì, ma ce ne sono anche più alla menta.
> Armando: É vero, però 50 rispetto 30 è tanto.
> Io: Ma anche 60 rispetto 40.
> Armando: Sì, ma io devo guardare quelle alla liquirizia.

Nonostante ad Armando fosse stato fatto notare che è importante tenere conto anche delle caramelle alla menta, rimane convinto fermamente della sua idea.

A4: *Viene sottostimato lo svantaggio dato da una maggiore quantità di caramelle "perdenti"*

Al contrario di prima, questa volta l'attenzione è focalizzata sul non pescare la caramella che fa perdere e quindi queste devono essere poche.

> Io: Christian, vedo che hai scritto nera, come mai?
> Christian: Io ho scritto nera perché ci sono meno caramelle alla menta rispetto alla scatola bianca e quindi potrebbe prenderne di meno.
> Io: Non ho capito... Prova a spiegarmi meglio.
> Christian: Nel senso, ci sono 40 caramelle alla menta e là 60. Quindi è meno probabile che peschi quelle alla menta e di perdere.

B1: *Le caramelle diverse vengono confrontate facendo la differenza*

Questo tipo di strategia non è stato attribuito al livello di apprendimento più basso perché c'è l'intenzione da parte degli studenti di effettuare un tipo di confronto fra i due tipi di caramelle e non di considerare solo una delle due quantità. Ecco come ha risposto Eva, studentessa del secondo anno:

> Eva: Ho scritto indifferente, perché se lui vuole prendere una caramella a caso, basta che mette la mano dentro la scatola e la prende, poi però lui dice che gli piacciono le caramelle alla liquirizia ma odia quelle alla menta, però comunque la probabilità di prendere una caramella alla liquirizia è uguale. Io: Okay...ma la scelta è indifferente perché?
> Eva: Basta che prenda una caramella e comunque se lui vuole prenderne una alla liquirizia, dato che odia la menta, è uguale sia che la prende dalla scatola bianca o nera. Io: Ma perché è uguale?
> Eva: Perché la differenza tra le due è sempre 10.
> Io: E nel secondo tavolo?
> Eva: Ho fatto come prima, la differenza, e mi è venuta la scatola nera.

In un errore di questo tipo, vengono espresse anche delle euristiche di rappresentatività, in cui non viene considerata come dato fondamentale la numerosità del campione.

B2: *Le caramelle vengono confrontate facendo il rapporto tra le caramelle vincenti e quelle perdenti*

La scelta di questa strategia, anche se conduce a risposte esatte in questo problema, è da giudicare solo parzialmente corretta perché non restituisce una vera e propria stima di probabilità. Si osservi come ha risposto Paola, intervistata con Andrea, studenti di prima liceo.

> Io: Okay, vediamo come hai fatto Paola.
> Paola: Ho fatto le frazioni. Tipo ho fatto 50 fratto 60 e 30 fratto 40. Poi li ho semplificati e viene cinque sesti e tre quarti.
> Io: Perché hai deciso di fare questa operazione?
> Paola: Perché così riesco a vedere quali dei due ha un rapporto più...grande?

> Andrea: Io dato che alle medie proprio zero, ho fatto la differenza fra le due, viene sempre 10 quindi hanno la stessa probabilità.
> Paola: All'inizio anche io ho fatto così, però poi quando fai le frazioni non viene. Cioè, uno è più grande dell'altro.
> Io: Se io prendessi una scatola con 10 alla liquirizia e 0 alla menta?
> Paola: Esatto, la differenza fa sempre dieci, quindi bisognava fare il rapporto.

In questo caso, Paola è convinta della sua strategia, forte anche del fatto che quella del suo compagno è errata.

C1: *Viene effettuato correttamente il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili*

Con questa scelta, viene applicata in modo corretto la definizione laplaciana, si effettua un giusto confronto tra le due possibili scelte e viene poi presa una decisione ponderata, basata quindi su un'argomentazione matematica valida. Qui di seguito, si vede quella data da Andrea, di 1°C.

> Innanzitutto nella scatola bianca ho sommato 50 più 60, che erano in totale le caramelle e nella scatola nera ho fatto 30 più 40 che fa settanta. Qua c'era scritto che al bambino piacevano più le caramelle alla liquirizia e ho fatto 50 sul totale che fa 110, e mi viene cinque undicesimi mentre nella scatola nera ho fatto la stessa cosa e mi viene tre settimi.

C2: *Dopo aver fatto correttamente il rapporto, viene trasformato in percentuale*

In questa strategia si usano tutti i procedimenti utilizzati nella precedente, ma si sceglie (o si sente l'esigenza) di trasformare la soluzione in un diverso registro, quello percentuale. In questo modo ha agito Andrea, di 1°C.

> Io: Andrea, Giulia ha usato le frazioni. Tu come hai fatto?
> Andrea: Io ho scritto in percentuale perché la probabilità si scrive così!

Io: Spiegami meglio.
Andrea: Ho fatto il totale delle caramelle in una scatola, poi ho fatto che 50 sta a 110 come x sta a 100 e ho trovato la percentuale. Ho fatto questo stesso ragionamento e mi viene bianca, bianca e nera.

In questa intervista si ritrova evidentemente l'esigenza di dover esprimere la probabilità come percentuale, per capirne meglio il significato.

QUESITO 2:

A1: *I risultati possibili sono tutti casuali perché non si può determinare cosa potrebbe uscire prima che si lanci la moneta*

Questo tipo di strategia è sicuramente riferito a persone del livello A, il più basso, che non ritengono sia possibile stimare la probabilità di accadimento di eventi futuri. Così ha risposto Agnese, del primo anno di liceo, nell'intervista con Vittoria.

Io: Agnese, come mai hai messo no?
Agnese: Cioè, alla fine non è che ho sparato a caso, però è probabile come no che esca lo stesso simbolo uno o più volte di fila ma come può anche non essere, cioè può uscire alternato perciò non c'era una risposta sola. Devo prima lanciare.
Vittoria: Ha fatto la prova con la monetina lei!
Agnese: Sì ma non è per quello, è probabile come no, cioè non è che c'è una risposta precisa, per me 50 e 50, ma anche no.
Io: 50 e 50 se ci sono due possibilità. Qui ce ne sono 3.
Vittoria: Eh infatti boh...
Agnese: É probabile come no che esca lo stesso simbolo.

In questa intervista si ritrova un lessico specifico per chi ha questo modo di pensare: nel momento in cui dice "è probabile come no", si individua che lo studente non ha ancora afferrato le potenzialità di una previsione usando un ragionamento di tipo probabilistico.

A2: *Tutti gli eventi hanno la stessa probabilità del 50% di venire scelti*

Con questa particolare strategia non viene riconosciuto che gli eventi non sono equiprobabili e sopratutto non viene percepita la proprietà che la somma delle probabilità di eventi esaustivi deve essere 1 (100%). Si osservi il dialogo tra Alberto e Bianca, di seconda liceo.

> Alberto: Io ho scritto che tutti e 3 hanno la stessa possibilità di lavare i piatti.
> Io: Perché?
> Alberto: Perché si. Cioè quando io lancio una moneta non è che c'è più probabilità che esca testa rispetto croce. Quindi potrebbe uscire sia due volte testa che due volte croce che un volta testa e una volta croce.
> Bianca: Io ho scritto no perché, Marco se vengono due croci, Livia invece se vengono due teste, Lorenzo se viene una croce e una testa. Quindi, cioè, se vengono tutte due uguali, nel senso, quello che ha più probabilità è Lorenzo perché ne ha tutte due diverse.
> Io: Alberto, che ne pensi?
> Alberto: Io non sono d'accordo, perché secondo me c'è sempre la stessa probabilità di beccarne due di fila uguali che di beccarne due di fila diverse.
> Bianca: Ah tu pensi che è più probabile che tutte due siano uguali?
> Alberto: No, io penso che c'è sempre il 50% di probabilità di beccarne una delle tre.
> Io: Tu dici che beccare due teste è uguale a beccare una testa e una croce?
> Alberto: Sì, c'è la stessa probabilità.
> Io: Bianca, secondo te ha ragione?
> Bianca: Cioè?secondo me no perché ? no in effetti ha ragione lui.

La convinzione errata di Alberto è tanto radicata da convincere Bianca, che invece stava andando nella direzione giusta forse perché in generale Alberto è più bravo della ragazza.
Questa strategia è inoltre associabile all'euristica della rappresentatività illustrata da Kanheman e Tversky, riguardo l'illusione di validità: si acquista molta fiducia al fatto che, lanciando una moneta, si debbano avere dei ri-

sultati equiprobabili, anche perché questo è un procedimento usato molto spesso per prendere alcune semplici decisioni quotidiane. Data la grande componente affettiva questa strategia è da considerare un indicatore del livello A.

A3: *L'uscita dello stesso simbolo è più probabile dell'uscite di due simboli diversi*

Questo tipo di errore è riconducibile all'affettività, ad alcune esperienze passate che hanno generato un apprendimento sbagliato di alcune nozioni. Questa conclusione si vede bene dall'intervista di Wanda (2°I) che ha dato questa spiegazione.

> Wanda: Io ho messo che è improbabile che a Lorenzo vengano fuori una testa e una croce perché ho detto, il caso non mi dava l'idea che se uno lancia una monetina può venire una volta e una volta. Almeno tutte le volte che ho lanciato una monetina io è sempre venuta la stessa cosa, lo stesso simbolo di seguito, quindi ho calcolato che era improbabile che venisse una volta e una volta.

Wanda fa proprio riferimento alla sua esperienza personale argomentando la sua convinzione e poi afferma di aver usato questa per "calcolare" che due simboli diversi era meno probabile. Inoltre, il modo in cui argomenta e espone la sua giustificazione lascia pensare che questa misconcezione sia molto "robusta" nella mente della giovane ragazza.

A4: *La probabilità di uscita di più monete viene stimata uguale al lancio di una moneta*

Questo tipo di strategia è molto simile alla A2 di cui si parla prima, però non è detto che la probabilità stimata sia per forza il 50% ed inoltre viene esteso il ragionamento fatto per una moneta anche al lancio di più monete. Questo stralcio di conversazione tra Giuseppe ed Andrea ne mostra un esempio evidente:

> Giuseppe: Tutti hanno la stessa probabilità perché quando si lancia una moneta c'è sempre 50 e 50 che esca testa o croce e

anche se la lancio due volte di fila questa probabilità non cambia.
Andrea: Anche io ho fatto questo ragionamento.
Io: E se invece lanciassi la moneta più di una volta.
Andrea: Non cambia. Perché la moneta ha sempre il 50%.
Giuseppe: É vero. La moneta ha sempre il 50% e quindi una, due o più volte croce, è sempre uguale.

Anche in questo caso, per rappresentatività, si tende ad associare al caso più semplice che meglio assomiglia; nel problema in questione, al lancio di più monete si associa il lancio di una sola.

B2: *Tutti gli eventi hanno la stessa probabilità del 33% (o un terzo)*

A differenza della strategia A2, in questo caso gli eventi vengono percepiti come esaustivi e quindi la somma di queste probabilità deve essere il 100%; proprio per questo motivo questa strategia può essere considerata un indicatore per il livello B.

Melissa: Io ho messo che secondo me hanno la stessa probabilità perché secondo me quando lanci una moneta non puoi decidere cosa uscirà, quindi può uscire o testa o croce e non possono decidere se usciranno due teste o due croci o una e una.
Io: Quindi hanno tutti la stessa probabilità. Ma quant'è questa probabilità?
Melissa: Uno su un totale?
Io: Come vuoi, uno su un totale, una percentuale.
Melissa: Mmmh, uno su due.
Io: Quindi ognuno ha il 50%?
Melissa: Mmmh no, forse il 35%.

Melissa, ragazza di terza media, stima questa probabilità sul 35%, sbagliando nel riconoscerli come equiprobabili ma indicando la probabilità giusto nel caso in cui questi lo fossero stati.

B3: *Non si riesce a fornire una spiegazione sufficiente del perché un evento è più probabile*

Con questa particolare strategia si indicano tutti quegli studenti che pur percependo il fatto che gli eventi non siano equiprobabili e sottolineando che Lorenzo è quello con probabilità maggiore di perdere, non riescono a fornire una valida motivazione alla loro supposizione, come ha fatto Christian, della 2°I.

> Io: Come hai risposto Christian?
> Christian: Secondo me non hanno la stessa probabilità. Perché la probabilità che esca due volte la stessa faccia è minore rispetto a quella che escano due facce diverse.
> Io: Perché?
> Christian: Perché... cioè, è più probabile che escano due volte due facce diverse rispetto a due facce uguali.
> Io: Ho capito, ma perché?
> Christian: Perché... cioè, se io lancio il dado...perché sì.

Quello che riporta l'Invalsi tra i traguardi che tenta di valutare questa domanda è presente anche "sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando le concatenazioni di affermazioni". Saper giustificare correttamente una risposta è una parte fondamentale dell'apprendimento degli studenti, perciò rispondere correttamente ma non saper giustificare adeguatamente è un valido indicatore del livello B.

C1: *Si ottengono due combinazioni diverse per Lorenzo (testa croce e croce testa)*

Utilizzando tabelle a doppia entrata, grafi o semplici constatazioni di combinazioni si giunge alla conclusione che Lorenzo ha probabilità maggiore, valutata al 50%, mentre gli altri al 25%. Si osservi come Brendi, di 3°B, ha argomentato:

> Brendi: Io ho messo no perché ho visto che c'era più probabilità che uscisse testa croce o croce testa.
> Io: Perché c'è più probabilità?
> Brendi: Perché ho fatto questo schema ad albero ed ho visto che la probabilità di prendere croce croce è un quarto, così come testa testa. Invece croce testa o testa croce è del due quarti.

Questo genere di strategia è utilizzato molto dai ragazzi che hanno già avuto modo di confrontarsi con i processi mentali della probabilità da un punto di vista scolastico, imparando procedure e metodologie utili per affrontare il problema.

C2: *Ritenere che, a prescindere dall'uscita del primo tiro, Lorenzo sia ancora a rischio*

A differenza della precedente, questo tipo di strategia viene utilizzata dagli studenti che non hanno studiato la probabilità a scuola ma che riescono ad immedesimarsi efficacemente nella situazione descritta dal problema, farne una buona lettura, una buona analisi ed infine fornire una corretta interpretazione. Un ragazzo di prima, Manuele, ha argomentato così.

> Manuele: Io ho messo no. Perché se ad esempio al primo lancio esce croce, Livia è già sicura che non laverà i piatti senza che debba tirare la seconda moneta. Dopo, se è uscito croce hanno la stessa probabilità Marco e Lorenzo perché uno perde con testa e uno con croce. Ma all'inizio Lorenzo è più svantaggiato.

Manuele fa mentalmente una casistica di tutto ciò che potrebbe succedere e in questo modo conclude che qualcuno dei personaggi in questione rischia di più. Questo sapersi immedesimare in una situazione di un problema è una delle abilità che fanno sì di poter considerare chi usa questa strategia appartenente al livello C, il più alto nella scala che si considera nel progetto.

QUESITO 3:

A: *Si afferma che è possibile che possano uscire anche tutti gli altri numeri*

Chi ha scelto questa strategia ha male interpretato la situazione e non ne comprende le particolarità: il tentativo di giustificazione è inadeguato e si avvale del fatto che, lanciando un dado, possono uscire anche altri numeri, pensando che sia difficile valutare se prima non si lancia. Agnese ha provato a spiegarsi così.

> Io: Vediamo come hai fatto l'ultima Agnese.
>
> Agnese: Io ho messo falso, perché magari a volte può uscire più

di fila lo stesso numero, perciò ho ragionato come se uscisse... visto che il 4 potrebbe uscire ancora un'altra volta come il 5 di meno.
Io: E perché nella B hai messo vero?
Agnese: Perché come ho detto prima magari a volte può uscire più volte lo stesso numero e allora ho ragionato che siccome è uscito più volte potrebbe uscire di nuovo ma anche no perché possono uscire tutti gli altri.
Io: Ma qual è più probabile?
Agnese: Potrebbe essere il 4, come il 5, devo prima tirare.

In questo caso, Agnese tende a fare delle riflessioni riguardo a ciò che si potrebbe stimare sul dado una volta che viene effettuato il lancio.

B1: *Ritenere che la probabilità aumenti (diminuisca) perché un numero è uscito più (meno) volte*

Questa strategia è uno degli esempi in cui interviene l'euristica della rappresentatività: la probabilità aumenta se un evento si verifica più volte.

Io: Chiara, partiamo con la B.
Chiara: Io ho fatto un ragionamento basilare, ho scritto che è vero perché comunque se fino adesso è quello che è uscito più volte magari è probabile che esca ancora.
Io: E perché nella C hai messo falso?
Bianca: Ho fatto sempre lo stesso ragionamento delle altre due, perché comunque il 5 è uscito meno volte, il 4 è uscito più volte e allora io ho pensato che il 4 nel lancio successivo può uscire più volte.

Si è scelto di collocare questa strategia tra gli indicatori del livello B perché, diversamente dalla strategia A, chi la usa è uno studente che riesce ad analizzare bene il problema, a porsi le domande giuste anche se poi si ritrova a sbagliare a causa di una tipica misconcezione.

B2: *Ritenere che la probabilità aumenti (diminuisca) perché un numero è uscito meno (più) volte*

Questa strategia possiede tutte le particolarità della precedente, ma è quella nota come la "fallacia dello scommettitore": si ritene che se un evento non accade da un determinato tempo o è accaduto poche volte, la probabilità che si verifichi aumenta. Sopratutto nel caso in cui si riconosce che gli eventi sono equiprobabili, si ritiene un'uscita più probabile proprio perché le frequenze dovranno, all'incirca, coincidere.

> Vittoria: Io nell'ultima ho messo vero perché, 5 è uscito il minor numero di volte, il 4 è uscito il maggior numero di volte. Quindi, il 5 essendo uscito il minor numero di volte è più probabile che esca perché tutti i numeri hanno la stessa probabilità.
> Io: Ma se hanno la stessa probabilità, come fa ad essere più probabile che esca.
> Vittoria: Proprio perché hanno la stessa probabilità deve riuscire, perché è uscito meno.

Vittoria, che frequenta la terza media, ha una concezione errata del caso, che interpreta come un'entità che farà si che eventi equiprobabili usciranno esattamente lo stesso numero di volte, anche per piccole sequenze di tentativi.

C: *La probabilità di uscita è indipendente dalla frequenza con cui un evento si è verificato nei lanci precedenti*

Questa è la strategia giusta, in cui si individua che la probabilità dell'evento in questione non dipende da quante volte è uscito un certo numero nei risultati precedenti.

> Io: Vediamo la C.
> Alberto: Io ho messo falso perché secondo me c'è la stessa probabilità di far uscire un qualsiasi numero in un dado.
> Io: Per la C hai fatto lo stesso ragionamento?
> Alberto: Sì, ho messo vero perché la probabilità che esca 5 è uguale a quella che esca 4. Non dipende dai lanci precedenti, la probabilità non cambia.

La scelta di questa strategia è quasi sempre giustificata da alcune espressioni ricorrenti, tipo "la probabilità non cambia" oppure "è sempre la stessa, è sempre uguale" o anche affermando che se un numero è uscito più volte è una casualità.

QUESITO 4:

A1: *Si utilizzano il numero delle facce o il 7 per calcolare la probabilità*

In questa strategia si rilevano alcuni effetti del contratto didattico, in cui gli studenti decidono di utilizzare, per calcolare la soluzione, i numeri che compaiono nel testo del problema senza che questi siano rilevanti per la soluzione stessa, come in questo caso il 7, faccia di cui si calcolano le probabilità, oppure il 6, non inteso per calcolare le combinazioni possibili. Si osservi come si è approcciata al problema Linda (3°B).

> Linda: Io ho fatto i numeri in tutto di due dadi, che sarebbero 12 e siccome devo trovare la probabilità di fare 7 viene fuori sette ventunesimi.
>
> Io: Perché hai messo 7 al numeratore?
>
> Linda: Perché devo calcolare la probabilità che venga sette quindi sopra metto 7.

Linda utilizza il 7 per calcolare la probabilità che il numero stesso esca, senza andare alla ricerca di casi favorevoli o possibili. Questo tipo di strategia è sicuramente un indicatore del livello A.

A2: *Considerare i numeri possibili equiprobabili*

Un errore tipico in problemi di questo genere può essere quello di non riconoscere che i casi possibili(intesi come le facce del dado) non sono equiprobabili fra loro e quindi indicare come probabilità, utilizzando la definizione laplaciana, uno su un totale, come ha fatto Pietro, di seconda liceo.

> Pietro: Io ho scritto che è uguale a tutti gli altri numeri.
> Io: Perché?
> Pietro: Perché la probabilità che esca la somma sette è uguale alla probabilità che hanno di uscire tutte le altre somme tra i due dadi, da due a dodici. E quindi uno su undici.

Molto spesso alla probabilità (sopratutto classica) si associa lo slogan "casi favorevoli su casi possibili" senza pensare che questa definizione è valida soltanto nel caso in cui gli eventi sono fra loro equiprobabili; in caso contrario è necessario cambiare approccio.

A3: *Tentare una risposta qualitativa*

Con questa particolare strategia si intendono tutte quelle risposte in cui gli studenti tentano di dare una stima soggettiva della probabilità di uscita del 7 basandosi su ipotesi più o meno esatte. Molto spesso questa stima è espressa in percentuale e viene largamente sottostimata o sovrastimata. Si riporta un esempio di un'intervista ricollegabile a questa strategia.

> Christian: Io ho scritto che c'è una probabilità del 60%, perché su tutte le combinazioni, 6 hanno la somma di sette.
> Io: E come fa a venire 60%.
> Christian: Eh questo non lo so però era per dire che è il più probabile.
> Io: Okay, ma non è un po' troppo?
> Christian: Forse sì, però è comunque molto alto.

Christian offre uno spunto interessante riguardo l'utilizzo di questo tipo di strategia: da alcune supposizioni esatte (il fatto che abbia più combinazioni degli altri numeri) deduce che il sette sia quello più probabile e ciò lo porta a sovrastimarla: è una misconcezione diffusa tra i ragazzi di queste età ritenere che quando un evento è più probabile di altri, la sua probabilità superi il 50%.

B1: *Sbagliare la valutazione dei casi possibili*

Si è deciso di valutare questa strategia come indicatore del livello B perché usata nel caso in cui lo studente applichi la procedura corretta, ovvero quella del voler utilizzare la definizione classica rapportando i casi favorevoli e quelli possibili, ma commette un errore nella valutazione di quest'ultimi.

> Io: Alex, dimmi come hai pensato di fare.
> Alex: Io ho ragionato che ho fatto tutte le probabilità che possa uscire sette e sono 6, poi ho fatto tutti i numeri che potrebbero

> uscire che sono 36, per due fa 72. Ho fatto 6 per 100 su 72, e viene l'8%.
> Io: Perché hai messo 72?
> Alex: Perché questi sono 36 però solo per una faccia, quindi girata... per 2. Qua per esempio, 4+2 può venire 2+4.

In questa intervista, Alex commette alcuni errori nel momento in cui deve calcolare i casi possibili, moltiplicando per due una volta di troppo.

B2: *Sbagliare la valutazione dei casi favorevoli*

Per questa strategia valgono le stesse valutazioni di quella sopra, l'unica differenza è che si sbaglia a calcolare i casi favorevoli, come fa Giuseppe, studente di 3°B.

> Giuseppe: Ho messo un dodicesimo.
> Io: Come ha fatto a venire un dodicesimo?
> Giuseppe: Perché i dadi sono due e 6 per 6 fa 36. Poi le combinazioni sono tre, ovvero 1+6, 2+5, 3+4. Quindi tre trentaseiesimi.

B3: *Ritenere che l'ordine di uscita non conti*

Con questa strategia non si considerano come combinazioni diverse due con numeri invertiti, in questo modo si sbagliano entrambi i casi, ottenendo spesso la risposta di tre ventunesimi. Analizzando le interviste se ne trovano diverse, come quella di Alberto, studente del secondo anno di liceo scientifico.

> Alberto: Ho guardato tutte le possibilità che possono uscire nel dado, ho visto che erano ventuno e le possibilità che dovevo trovare io, che sono 3, quindi ho fatto 3 su ventuno che fa un settimo. Poi ho fatto la percentuale, ed venuto circa il 14%.
> Io: Come hanno fatto a venire 3 possibilità?
> Alberto: Sono 3+4, 5+2, 6+1.
> Io: Ma quelle inverse non le conti? Tipo 3+4 e 4+3?
> Alberto: No perché la combinazione è la stessa.

Questo tipo di errore è tipico della rappresentatività, ritenere che due sequenze diverse siano uguali perché l'ordine di uscita non è rilevante. É anche uno dei pregiudizi tipici che porta a considerare, per esempio nel lotto, una sequenza di numeri casuali più probabile di una con numeri successivi.

C1: *Pensare che, qualsiasi sia il primo lancio, ci sarà ancora possibilità di vincere e che dipenda solo dal secondo*

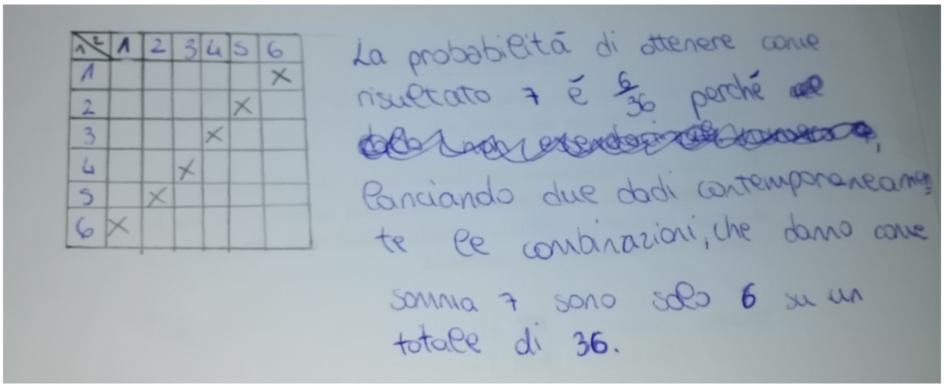
Questa strategia è adottata tipicamente da quelli studenti che non hanno ancora avuto modo di confrontarsi con la probabilità dal punto di vista scolastico, ma possiedono delle capacità sviluppate nell'interpretazione e analisi dell'ambito probabilistico, riuscendo ad immedesimarsi nella situazione per giungere a conclusioni corrette.

> Manuele: Io non ho calcolato i casi, ho fatto un ragionamento più semplice.. All'inizio avevo messo una possibilità su 4, ma poi mi sono reso conto che avevo sbagliato. Dopo che hai tirato il primo dado non ti cambia niente quale numero esca, dopo hai una possibilità su sei che capiti il numero che la somma faccia 7, quindi ho messo un sesto.

Riuscendo ad immaginare correttamente tutte le possibili opzioni di cosa accadrebbe una volta lanciato il primo dado, Manuele dimostra di avere una mentalità sviluppata in questo genere di problemi: chi utilizza una strategia di questo tipo si colloca nel più alto dei livelli descritti sopra.

C2: *Trovare le combinazioni favorevoli e possibili con una tabella a doppia entrata*

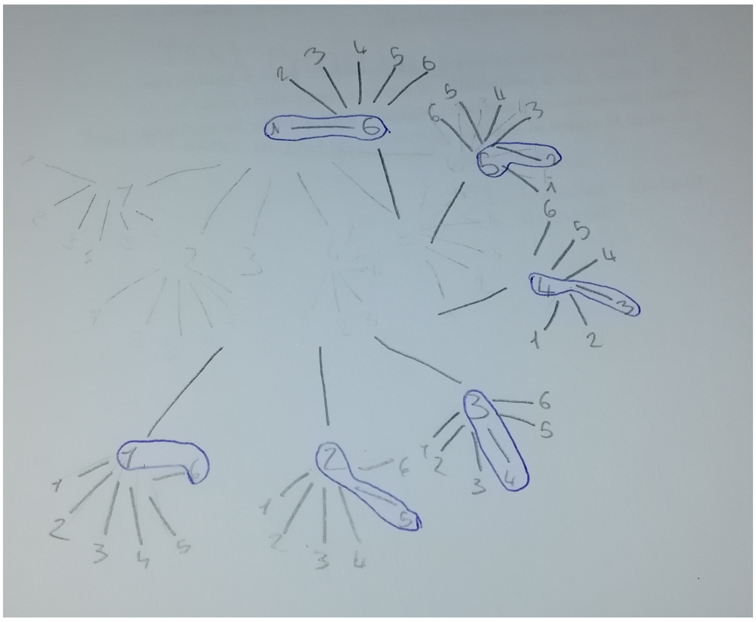
Per questo genere di problemi la tabella a doppia entrata è uno dei metodi più classici e più efficaci, ed è proprio per questo che chi usa questa strategia è sicuramente da collocare nel livello C. Nella foto seguente si può osservare come ha sviluppato questa strategia Melissa, di 3°B.



Melissa ha agito molto bene: ha costruito adeguatamente la tabella a doppia entrata, poi ha segnato con una croce le caselle in cui la somma era sette, senza dover scrivere tutti i numeri dentro, capendo che i casi favorevoli sono sulla diagonale.

C3: *Utilizzare adeguatamente un grafo ad albero*

Come per la tabella a doppia entrata, anche il grafo ad albero è una delle strategie più funzionali, utilizzato successivamente anche per rappresentare la probabilità condizionata. Brendi, sempre di 3°B, ha sviluppato il grafo in questo modo.



Pur non essendoci un nodo di partenza, in questo modo Brendi riesce a visualizzare correttamente tutte le combinazioni: si osserva molto bene anche che combinazioni inverse (1-6 e 6-1) devono essere considerate come diverse.

C4: *Rapportare correttamente casi favorevoli e casi possibili*

Con questa strategia, contando i casi favorevoli e i casi possibili e rapportandoli correttamente, si giunge alla soluzione di un sesto, che poi eventualmente può essere convertita nel registro percentuale.

> Paola: Tutte le combinazioni sono 36, perché i lati dei dadi sono sei e ho fatto sei per sei. Poi ho trovato quelle del sette che sono sei perché ho contato uno più sei, sei più uno così via, Poi ho fatto sempre la frazione, sei trentaseiesimi che semplificato è un sesto.
>
> Andrea: 3-4 e 4-3 è la stessa cosa.
>
> Paola: Eh invece no perché in un dado può venire 4 e nell'altro 3 però cambia se nel primo viene 3 e nell'altro 4.
>
> Andrea: Sì, ma qui dice qual è la probabilità di ottenere sette, quindi non cambia quale dado.
>
> Paola: Sì però è sempre una combinazione in più che c'è.

In questa intervista si può osservare chiaramente che Paola afferma che le combinazioni sono sei ed è necessario contare anche le combinazioni con ordine invertito. Strategia di questo tipo è, ovviamente, attribuibile al livello C.

QUESITO 5:

A1: *Il confronto viene effettuato unicamente basandosi sul numero di palline vincenti*

Una degli errori più comuni è quello di valutare la probabilità basandosi solo sulla quantità, in questo caso, delle palline vincenti e ignorando quindi la numerosità del campione, come è stato detto anche da Kahneman e Tversky. Errore di questo tipo è un indicatore del livello A, che porta a rispondere con "ugualmente".

> Micheal: Ho messo che il sacchetto A è ugualmente probabile al sacchetto B.
> Io: Perché hai messo che è uguale?
> Micheal: Perché ci sono 4 palline rosse nel sacchetto A e 4 palline rosse nel sacchetto B.
> Io: E le palline nere?
> Micheal: Non importa perché io devo estrarre una pallina rossa.

In questo caso, Micheal ammette che il numero delle palline nere, quelle perdenti, non è rilevante, perché per stimare la probabilità è necessario guardare solo il numero delle palline vincenti, le rosse.

A2: *Usare come parametro di valutazione il numero totale di palline*

Una strategia di questo tipo è sempre un indicatore del livello A, in quanto questa volta il metro di misura della probabilità diventa la numerosità dell'insieme, ovvero è più probabile il sacchetto in cui ci sono più palline. Basta una frase detta da Loredana, del terzo anno del primo grado, per capire il modo di approcciarsi al problema di chi sceglie questa strategia.

> Loredana: Ho messo "più" perché nel sacchetto A ci sono più palline e quindi è più probabile.

Con questa strategia, si percepisce un consistente aumento delle palline vincenti all'aumentare della numerosità dell'insieme, aumento che non è proporzionale con quello delle palline perdenti.

A3: *Non vengono infilate 6 palline rosse ulteriori*

"Individuare strategia risolutive individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive" è uno dei parametri che l'Invalsi usa per valutare questa domanda, quindi anche saper interpretare correttamente la richiesta di un esercizio. Si osservi come fa Darius.

> Darius: Io ho provato varie combinazioni e alla fine ho pensato di mettere 2 palline rosse nel sacchetto A e 3 palline rosse nel sacchetto B.
> Io: Perché hai fatto questa scelta?
> Darius: Perché così veniva 6 e 8 da una parte, 7 e 6 dall'altra e mi sembravano abbastanza...simili?
> Io: Quante palline dovevi infilare?
> Darius: Ehm...sei. Ah, allora ho sbagliato.

Darius non cerca di infilare un numero di palline per averne due uguali, piuttosto cerca una strada più complessa per tentare di avere lo stesso rapporto e provando varie conclusioni dimentica anche la richiesta del problema di infilare solo sei palline aggiuntive.

B: *Vengono infilate 3 palline rosse per sacchetto*

Con questa strategia lo studente risponde correttamente al primo item, ma nel momento in cui deve manipolare delle quantità e deve modificare il problema iniziale secondo determinate condizioni, cade nella misconcezione che precedentemente era riuscito ad evitare, ovvero quella descritta in A1, considerando la probabilità solo a partire dal numero dei casi favorevoli.

> Io: Daniele, come hai fatto la seconda parte del problema?
> Daniele: Io ho messo 3 e 3 per dividere equamente.
> Io: Ma così la probabilità non rimane sbilanciata?
> Daniele: No perché in uno diventa 7 e nell'altro diventa 7. E così c'è meno probabilità che esca una nera.

C: *Viene risposto correttamente ad entrambi gli item*

Con questa risposta, lo studente dimostra sia di saper prendere una scelta adeguata usando la probabilità, sia di saper manipolare determinate quantità secondo certe ipotesi, come fa Giacomo in questa intervista.

> Giacomo: Dato che il sacchetto A è meno probabile perché ci sono più palline nere ne aggiungo 4 rosse, così viene 8 e 8. Solo due nell'altro, così viene 6 e 6.
> Io: Ma così cosa ottieni?

Giacomo: Eh, ottengo che sono uguali nei due sacchetti e la probabilità è il 50% in entrambi.

Individuare il modo giusto di aggiungere le palline per ottenere esattamente il 50% da entrambe le parti è sicuramente una procedura che identifica uno studente che può essere inserito nel livello C di apprendimento.

7.1.1 Linguaggio e Proprietà

Nel corso dell'analisi delle interviste, sono stati ritrovati delle imprecisioni sia nel linguaggio sia nell'uso delle proprietà, alcuni in casi di risposta corretta e altri dove emergono degli errori strategici. Tali errori non possono essere ignorati perché possono influire sulla capacità di analisi di situazioni probabilistiche e di apprendimento: infatti, se viene attribuito ad un oggetto o ad una procedura un significato sbagliato, difficilmente si potrà correggere tale comprensione.
Uno degli errori tipici, per quanto riguarda il linguaggio, è quello di confondere il termine probabilità con possibilità, come nella seguente intervista:

> Darius: Io ho fatto una tabella a doppia entrata e ho sommato i vari membri e il mio risultato è che ci sono 5 probabilità che venga sette.
> Io: Quindi la probabilità che venga sette è 5?
> Darius: Sì.
> Io: Cinque probabilità?
> Darius: Sì.

Questo tipo di errori non è assolutamente da sottovalutare: comprendendo male il significato delle parole e facendone un uso inadeguato, oltre a non saper sviluppare un discorso logico, c'è il rischio di dare una cattiva interpretazione alle informazioni che si devono analizzare.
Una comprensione incompleta del modello probabilistico può portare ad un utilizzo inadeguato delle procedure e delle proprietà. Questo è il caso di Silvia, che agisce così.

> Silvia: Praticamente io ho messo che il primo lancio può avere ogni numero mentre il secondo lancio deve avere quel numero che sommato col primo dia sette. Quindi un valore casuale, 6 su 6, un valore preciso 1 su 6 e li ho sommati. Quindi viene probabilità

sette sesti.
Io: Cosa significa probabilità sette sesti?
Silvia: Boh. Si sicuro che è molto probabile.

L'intervista è molto interessante in più di un punto: comincia bene immedesimandosi nella situazione, però commette un errore, scegliendo di sommare. Facendo così ottiene un numero che non può essere una stima di probabilità perché maggiore di 1. Purtroppo non riesce a capire che questa è una proprietà fondamentale e di conseguenza attribuisce un'interpretazione sbagliata alla soluzione, con una sovrastima.

7.2 Le Categorie

Arrivati a questo punto sono state catalogate le strategie scelte nel test dai ragazzi, ordinate come indicatori di uno specifico livello, ovvero le strategia del tipo A1, A2, A3, etc, sono indicatori del livello A e così anche per le altre strategia e livelli. Identificando immediatamente una strategia con un livello (ed usando quindi la strategia come indicatore) si tende ad attribuire ad una risposta un grado di efficacia, come fosse un voto; in questo modo non vengono messi alla luce diversi modi di pensare, diversi processi mentali e cognitivi che possono essere indipendenti dai livelli. In sostanza, processi cognitivi diversi non determinano diversi livelli di apprendimento: uno studente che ha frequentato delle lezioni di probabilità e uno che invece non l'ha fatto, sicuramente useranno strategie diverse, ma ciò non vuol dire che il primo sia necessariamente più preparato dell'ultimo ad affrontare situazioni in ambito probabilistico. La probabilità mette in moto modi di pensare diversi da quello classico deterministico, perciò per valutare il grado di apprendimento degli studenti non è sufficiente verificare che questi sappiano o meno rispondere a problemi prefissati con strategie prefissate; è necessario interrogarsi sul come i ragazzi interpretino i dati del problema, come ne sviscerano le caratteristiche e come costruiscono la soluzione. Ecco perché è stato necessario identificare delle categorie di pensiero che puntino ai livelli di apprendimento, per non limitarsi al grado con cui gli studenti risolvono i problemi proposti ma estendersi al come si approcciano al problema e con quali processi cognitivi.
Ciò che è stato fatto è definire delle categorie che caratterizzassero diversi

modi di pensare e riportare le relative strategie che adottano gli studenti che sono rappresentativi di una certa categoria.

CATEGORIA 1 (Livello A):

Lo studente non è in possesso di modelli coerenti di probabilità, né tanto meno si pone il problema di come poter fare a risolvere il problema in modo matematico. I processi mentali sono di tipo euristico, approssimativi e pressapochisti. Le risposte che vengono fornite tendono ad essere semplicistiche, determinando i risultati direttamente dalle ipotesi, senza usarle in modo ragionevole per giungere ad una conclusione. (Rappresentatività)

QUESITO 1	A2, A3, A4
QUESITO 2	A2, A3, A4
QUESITO 3	A
QUESITO 4	A1, A3
QUESITO 5	A2, A3

Le strategie indicatrici di questa categoria sono tutte quelle in cui si pensa di poter giungere ad una soluzione corretta solo utilizzando le ipotesi e facendo o nessuno o pochi calcoli, non essendo a conoscenza di altre procedure a cui potersi appoggiare. Infatti ritroviamo ad esempio la A2 e A4 del Quesito 2, in cui si afferma direttamente che lanciare una moneta o più monete lascia invariate le probabilità, oppure la A1 del quesito 4, in cui si cerca la soluzione operando con numeri che non devono essere utilizzati nel calcolo diretto.

CATEGORIA 2 (Livello A):

Lo studente non riesce a comprendere come sia possibile stimare la probabilità che un fenomeno futuro accada: quello che ritiene è che sia impossibile stabilire a priori la probabilità perché si stanno considerando fenomeni casuali. Il linguaggio che si tende ad usare fa riferimento a questa idea, parlando di caso, sorte, fortuna. La spiegazione delle risposte fa riferimento al "non potere sapere prima", adducendo al fatto che hanno tutti la stessa probabilità che possano accadere prima che venga effettuata la prova e che dopo alcune estrazioni si possa dire qualcosa di più. L'idea è che la probabilità possa essere stimata solo a posteriori, basandosi sulle frequenze.

QUESITO 1	A1, A2
QUESITO 2	A1, B2
QUESITO 3	A
QUESITO 4	A2, A3
QUESITO 5	A1

Sono appartenenti a questa categoria tutti quei comportamenti in cui i ragazzi tendono istintivamente a giudicare, a priori, che alcuni eventi sono equiprobabili, pensando che prima di effettuare un numero di prove non è possibile prevedere quanto saranno differenti le frequenze. Nel momento in cui si pensa che alcuni eventi sono casuali, si afferma intuitivamente che questi hanno la stessa probabilità di accadere e che il loro verificarsi sia quindi determinato dalla sorte, o dal caso. Ecco perché in questa categoria sono presenti le strategia B2 del Quesito 2, A2 del Quesito 4 e A1 del Quesito 5.

CATEGORIA 3 (Livello B):

Lo studente riesce a capire quale sia il modello giusto da utilizzare ma non riesce a tradurlo in modo corretto con una espressione matematica adeguata; possiede la capacità di formulare un modello scientificamente accettato, quello che manca è la procedura corretta che descriva adeguatamente quel modello. Allo studente sono chiare la natura e le consegne richieste dal problema, lo sono di meno i metodi per esplicitare tale soluzione nel migliore dei modi.
L'approccio cognitivo al problema è fondato su idee coerenti, o imparate a scuola o formate autonomamente e soggettivamente. Queste idee sono il punto di partenza per costruire un processo comprensibile e internamente coerente, anche se la strategia matematica può essere sbagliata.

QUESITO 1	B1, B2
QUESITO 2	B3
QUESITO 3	B1, B2
QUESITO 4	B1, B2, B3
QUESITO 5	B

Prendendo come esempio il Quesito 1, questa categoria potrebbe descrivere il processo cognitivo usato da uno studente che riesce a capire che la scelta della scatola da cui estrarre si basa sulla ricerca della scatola che ha maggiore probabilità di essere vincente e che questa probabilità dipenda non solo da numero di caramelle vincenti ma anche da quello di caramelle perdenti; l'idea (intuizione) che per valutare la probabilità si debba "confrontare" queste due quantità è presente. Da questo momento, si sono verificate due strategie errate diverse, ovvero B1 e B2, confrontare facendo la differenza o rapportare vincenti su perdenti.

CATEGORIA 4 (Livello C):

Pur non utilizzando strategie risolutive tipiche della probabilità classica, lo studente riesce comunque a rispondere alla domanda. Ciò può essere fatto per intuizione, per immedesimazione in un contesto, per esperienza personale che ha generato una corretta interpretazione soggettiva, verificabile in un modello scientificamente accettato. Anche se il linguaggio non è prettamente tecnico, lo studente riesce a spiegare bene, utilizzando una propria terminologia , il senso del processo mentale e anche le proprietà si riescono a ricavare dall'insieme delle esperienze.

QUESITO 2	C2
QUESITO 3	C
QUESITO 4	C1

Appartenenti a questa categoria sono quelle strategie in cui si cerca di immedesimarsi nella situazione reale del problema; ad esempio nel Quesito 2 la strategia C2, in cui gli studenti immaginano come cambia il problema nel caso in cui nel primo lancio esce una faccia piuttosto che un'altra; oppure nel Quesito 4 la strategia C1, in cui si valuta che qualsiasi numero esca al primo dado, è ancora possibile fare una somma di sette.

CATEGORIA 5 (Livello C):

La probabilità è stata formalizzata correttamente relativamente al modello classico, il quale viene anche tradotto correttamente nella strategia risolutiva adeguata. Le strategie utilizzate sono molteplici, tra le quali grafi ad alberi, tabelle a doppia entrata (relativamente alle possibilità), percentuali e frazioni. Alcuni errori sistematici o cognitivi sono presenti, ma questi vengono "evitati" per non perdere compatibilità tra le idee ed il modello. Anche il linguaggio appartiene al modello ed è usato coerentemente per spiegare il *processo.*

QUESITO 1	C1, C2
QUESITO 2	C1
QUESITO 3	C
QUESITO 4	C2, C3, C4

In questa categoria si ritrovano tutte quelle procedure risolutive classiche apprese a scuola, con terminologie appropriate: ci possono essere delle tabelle, dei grafi ad albero o anche solo un calcolo diretto dei casi.

7.3 I Livelli

Dopo aver svolto il lavoro sulle interviste, prima con le strategie e poi con le categorie l'impressione è stata che i livelli di apprendimento dati a priori andassero aggiustati, non tanto nella sostanza quanto nella forma. Ad esempio, si è visto che molto spesso i ragazzi tendono a dare delle stime di probabilità molto soggettive, la cui valutazione dipende da alcuni parametri ma sopratutto dall'interpretazione che danno, la quale può essere influenzata da molteplici fattori, affettivi, euristici, cognitivi etc. É quindi importante nella formulazione dei livelli tenere conto di un punto di vista soggettivo. Un'altra parametro importante è sicuramente la valutazione che attribuiscono alle frequenze, quanto queste possano e devono essere usate per stimare la probabilità.
Ecco come si è pensato di riformulare i livelli:

LIVELLO A:

Gli studenti non riescono a cogliere l'idea stessa della probabilità né tantomeno le sue potenzialità; non sono in grado di comprendere come può essere utilizzata e per quale fine. A questo livello non si evidenziano processi mentali sviluppati, non c'è un approccio al problema secondo metodi matematici ma piuttosto per tentativi, approssimativamente ed euristicamente. La convinzione di base è che si può ottenere una buona stima di probabilità solo a posteriori, basandosi su frequenze determinate da prove ripetute. Le stime soggettive sulla probabilità sono grossolane, basate su ipotesi incomplete *o poco rilevanti, la cui importanza viene determinata dal grado di rappresentatività o affettività. Viene fatto un uso improprio delle frequenze che non si riescono ad interpretare adeguatamente e spesso emergono alcune misconcezioni che deviano il corretto processo cognitivo. Il linguaggio non è tecnico, non è appropriato ma comune, legato all'esperienza e risulta difficile distinguere il termine probabilità dal termine possibilità.*

LIVELLO B:

A questo livello la probabilità è un concetto matematico che si posa su basi abbastanza solide, tali da riuscire a costruire un modello adeguato; non è ancora ben sviluppata la parte della traduzione del modello in una procedura adeguata che lo descriva correttamente. Ad esempio, si interpreta che la probabilità deve essere valutata confrontando i casi favorevoli e possibili (in condizioni di equiprobabilità), ma non sempre viene riconosciuto il rapporto come la strategia giusta. La natura dei problemi è chiara allo studente, lo sono meno i metodi in cui esplicitare la soluzione. L'approccio cognitivo al problema è basato su idee coerenti e validate, che portano gli studenti di questo livello a saper esprimere delle stime accettabili, riuscendo ad attribuire alle ipotesi e ai dati del problema il giusto grado di importanza evitando sovrastime o sottostime eccessive. Il linguaggio si fa più tecnico, con la concreta capacità di attribuire un significato diverso a differenti oggetti, procedure, quantità e variabili, riuscendo a usarli in modo corretto. Nello svolgimento degli esercizi emergono alcune proprietà di base della probabilità, che possono portare eventualmente ad un cambio di strategia.

LIVELLO C:

Lo studente che appartiene a questo livello riesce ad utilizzare il modello probabilistico classico e a tradurlo adeguatamente in una strategia corretta e in una procedura efficace: questa traduzione può essere fatta utilizzando le competenze acquisite o per immedesimazione in un contesto, ovvero riuscendo ad immaginarsi in modo concreto e corretto un problema e a valutare tutte le possibili implicazioni nello svolgimento del processo. Le abilità apprese dallo studente riescono a far sì di poter risolvere una classe di esercizi, consapevole che il modello appreso che risulta efficace in un problema può essere utilizzato equivalentemente in altri contesti. Stime soggettive di probabilità sono ben ponderate e il più possibile calcolate, conscio del fatto che la probabilità è una sorta di aspettativa di ciò che dovrebbe accadere: viene *attribuito un giusto peso alle informazioni che determinano una stima. L'utilizzo delle frequenze è efficace, alle quali viene attribuita importanza solo nel caso in cui esse siano in un numero tale da essere considerate significative. Il linguaggio è tecnico e riferito al modello degli eventi, punto di partenza dell'analisi delle situazioni in incertezza.*

7.3.1 Inquadrare gli studenti all'interno dei livelli

Elaborare dei livelli di apprendimento della probabilità e di ogni campo della matematica è uno strumento utile nella misura in cui si può riuscire ad inquadrare un ragazzo al relativo livello di apprendimento; è necessario quindi un approccio concreto, un metodo chiaro e specifico che si può utilizzare per inserire uno studente in una specifica scala. Un aspetto importante dell'accostamento di un ragazzo ad un livello è il suo essere indipendente dalla valutazione: una definizione generica di valutazione potrebbe essere una "attribuzioni di un valore a qualcosa o qualcuno" (Domenici, 2003). Inquadrare un ragazzo in un livello di apprendimento non significa dargli un voto, ma affermare in modo del tutto qualitativo quali sono i processi mentali che può mettere in gioco, quali procedure e operazioni può mettere in atto nel risolvere un problema e quale interpretazione può dare di determinati oggetti e risultati. In sostanza, l'attenzione è focalizzata maggiormente sul soggetto e sui suoi caratteri qualitativi.
Il modo in cui è stato attribuito un livello ad un ragazzo nell'ambito di questa ricerca è il seguente:

1. Scegliere una scala di livelli di apprendimento valida;
2. Sottoporre i ragazzi ad un test che possa valutare una gamma piuttosto ampia di particolarità dell'ambito specifico;
3. Intervistare i ragazzi;
4. Riportare le strategie utilizzate dagli studenti;
5. Etichettare le strategie con riferimento ai livelli;
6. Decidere quale peso attribuire ai risultati ottenuti;
7. Accostare gli studenti ai livelli

Considerando quanto è stato fatto, questo elaborato riporta un esempio in cui questo metodo di accostamento è stato fatto. L'unico punto su cui ci si deve ancora soffermare è il 6 del quale ora si propone un esempio concreto. Esaminando i risultati del test, si può osservare che nei Quesiti 3 e 5 la percentuale di risposte corrette, sia nella risoluzione sia nelle interviste, è molto più alta rispetto alle altre risposte, perché a risposta chiusa e di difficoltà sicuramente minore. Perciò, sebbene importanti per la valutazione di un ragazzo, come d'altronde è già stato affrontato nel Capitolo 6, non sono del tutto significativi in un'ottica di inquadramento nei livelli perché causerebbero una sovrastima eccessiva. Anche le strategie che vengono evidenziate sono sono molteplici: questi due Quesiti mettono in luce sopratutto eventuali misconcezioni, piuttosto che i passaggi da processo cognitivo, procedura ed esplicazione di un risultato. A causa di ciò, è stata presa la decisione di attribuire un'importanza secondaria alle relative strategie, utilizzandole in secondo luogo come conferma dell'appartenenza ad un livello oppure nel momento in cui un livello non sia evidentemente attribuibile ad uno studente. Scegliendo queste misura, almeno nel nostro caso, è stato possibile attribuire ad ogni studente un livello di apprendimento.

Codice Studente	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	LIVELLO
07	A1	B2	C	A2	C	**A**
05	B1	A1	C	B3	C	**B**
11	A1	C2	C	C4	C	**C**

Con il metro di inquadramento scelto, i livelli assegnati agli studenti (presi dalla classe 2°I risultano chiari e univoci. Lo studente numero 07 viene inserito nel livello A anche in corrispondenza alla Categoria 2, in quanto le strategie ai 3 Quesiti principali risultano tutte dentro quelle di riferimento della categoria. Lo studente 05 appartiene invece al livello B, dato che due Quesiti su tre puntano verso quel livello e le domande 3 e 5 non evidenziano gravi misconcezioni. Le medesime conclusioni possono essere tratte per lo studente 11, solo con inquadramento nel livello C.

Talvolta questa metodologia può non funzionare, nel momento in cui c'è molta discrepanza tra le risposte:

Codice Studente	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	LIVELLO
13	C1	A3	C	B1	C	**?**

In questo caso, è difficile stabilire a quale livello si posiziona questo studente (classe 2°I) guardando solo la tabella: l'unica cosa che si può fare è rileggere l'intervista. Facendolo si scopre che l'errore commesso da questa ragazza nel Quesito 4 è di calcolo: infatti, valuta 34 casi possibili. Questo errore è probabilmente dovuto alla distrazione, perché è difficile pensare una procedura in cui si ottiene questo numero usando i dati a disposizione. La volontà di utilizzare una formula corretta è evidente. Anche se ai fini di una valutazione l'esercizio non può essere considerato esatto, si può certamente inquadrare lo studente in questione nel livello C.
Si osservino ora altri casi particolari, presi questa volta dalla terza media che ha affrontato la probabilità a scuola.

Codice Studente	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	LIVELLO
02	A3	B3	B1	C2	A1	**A**
03	B1	C2	C	A1	A1	**A**
01	B1	B2	C	C2	C	**B**

Negli studenti numero 02 e 03, le misconcezioni emerse dai Quesiti 3 e 5 costituiscono un aggravante rilevante, facendo sì che gli studenti siano inquadrati nel livello A. Lo studente numero 01, pur non presentando particolari misconcezioni evidenti, dimostra di non essere completamente padrone del modello, riuscendo a farne un uso completo solo in un caso su 3, accostandosi perciò al livello B.

Conclusione

Questo studio ha permesso, attraverso diverse modalità di analisi, di osservare gli studenti nel momento in cui si confrontano con alcune domande di probabilità e verificare il loro apprendimento in una scala a livelli, con il quadro di riferimento elaborato dai Van Hiele. Inoltre è stato possibile osservare l'insorgere nei ragazzi di alcune misconcezioni, ragionamenti euristici ed errori tipici, già osservati in altre ricerche e analizzare il modo in cui queste insorgono, il modo in cui vengono esternate e quali conseguenze possono causare.
Individuare una scala di livelli di apprendimento per la probabilità è sicuramente uno strumento interessante per capire quali sono i limiti degli studenti, ma è utile nella misura in cui è possibile inquadrare i ragazzi all'interno di un livello specifico: da questo punto di vista il test somministrato propone dei dati concreti sull'apprendimento sia algoritmico sia concettuale degli studenti, riuscendo a far sì che ogni ragazzo sia inserito in un livello specifico. Tuttavia, è interessante chiedersi quale risultato si può ottenere nel momento in cui viene proposto un test più completo, che riesca a mettere più a fuoco l'aspetto soggettivo della probabilità e quello frequentista: può accadere infatti che, senza aver mai frequentato delle lezioni di probabilità, ogni individuo tenti di stimare la probabilità in diversi modi.
Per quanto riguarda questo ambito della matematica, emerge una proprietà che potrebbe essere usata per caratterizzare i livelli in modo più completo: si verifica molto spesso nei ragazzi la convinzione che le proprie conoscenze siano sufficienti per spiegare qualsiasi tipo di situazione e risolvere ogni problema. D'altra parte, in altri casi si osserva che lo studente in questione sente la necessità di un ampliamento dei propri orizzonti, del dover introdurre nuove competenze per risolvere i propri dubbi. Si potrebbe pensare di suddividere ogni livello per identificare una proprietà che espliciti la "*propensione al salto*", ovvero che evidenzi l'esigenza di uno studente di

nuove conoscenze che lo aiutino in situazioni in cui, il sapere attuale, non è sufficiente. Questa proprietà si evidenza nei ragazzi nel modo in cui riescono a mettersi in discussione, nella misura in cui non credono ciecamente nelle proprie convinzioni ma vogliono sottoporle a verifica. É successo in alcuni ragazzi che nel momento in cui cadono in qualche errore ma vengono posti dinnanzi alla risoluzione esatta, essi continuano a perseverare nelle loro convinzioni e nelle loro misconcezioni; d'altra parte, alcuni si rendono conto dell'errore, capiscono subito come usare il nuovo strumento e addirittura sentono la "forza" di questo, con le potenzialità che porta con sé.
La probabilità rappresenta, per la maggior parte dei ragazzi, uno scoglio duro per tante ragioni: non porta dietro di sé una grande tradizione accademica, è un modo di pensare non deterministico che viene allenato tanto poco nella scuola di oggi, non utilizza strategie algoritmiche ma piuttosto "strategie di pensiero", parla di ciò che è possibile invece di ciò che è certo, è facile cadere in misconcezioni ed euristiche. Questo progetto pone l'attenzione su alcuni di questi punti che andrebbero osservati dagli insegnanti con sempre maggior rigore ed attenzione, per far sì che anche questa branca della matematica, tanto utile quanto complessa, possa diffondersi con efficacia. La partecipazione consapevole alla società sviluppata del giorno d'oggi passa attraverso l'insegnamento e l'apprendimento della probabilità

Bibliografia

[1] Arrigo G. (2014), *Le misconcezioni degli allievi di scuola primaria relative al concetto di probabilità matematica: Rapporto di ricerca* Bollettino dei docenti di Matematica. Bellinzona (Svizzera). 60, 59-82.

[2] Asenova M. *La Probabilità nelle Prove Nazionali di Valutazione.*

[3] Bagni G.T., Perelli D'Argenzio M.P. e Rigatti Luchini S. (1999). *A paradox of Probability: an experimental educational research in Italian High School.* Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st century. Cairo (Egitto): A. Rogerson Ed. III, 57-61.

[4] Bakhtin M. (1981), *Discourse in the novel* (M. Holquist & Emerson, Trans.) In M Holoquist (Ed.), *The dialogic imagination* (pp. 259-422). Austin: University of Texas Press.

[5] Batanero C., Burrill G., Reading C. (2011) *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, Dordrecht, Springer, New ICMI Study Series, Volume 14.

[6] Cerasoli M. (1995) *Breve storia sagionata della probabilità.*

[7] Domenici G. (2003) *Manuale della valutazione scolastica.* Bari: Editori Laterza.

[8] Fischbein E. (1975) *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*, Dordrecht (Olanda): D. Reidel Publishing Company.

[9] Greer B. *Understanding probabilistic thinking: the legacy of Efraim Fischbein.*

[10] Hawkins A.S. e Kapadia R. (1984). *Children's conceptions of probability, a psychologiacl and pedagogial review.* Educational studies in Mathematics. 349-377.

[11] Kahneman D., Tversky A. (1974) *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases.* Science, New Series, Vol. 185, No. 4157, 1124-1131.

[12] Kendall M. G. *Le origini del calcolo delle probabilità*, traduzione di Enzo Lombardo.

[13] Levrini O. et al (2015) *Defining and Operationalizing 'Appropriation' for Science Learning*, Journal of the Learning Science

[14] Meusnier N. (2006) *Sur l'histoire de l'enseignement des probabilitès et des statistiques.*

[15] Ottiaviani M. G. (2011) *Insegnare ed apprendere statistica e probabilità a scuola: il problema dell'aggiornamento degli insegnanti.*

[16] Piaget, J. (1976) *La genesi dell'idea di fortuito nel bambino.* Introduzione di Guido Petter. Roma: Newton Compton. 93-148.

[17] Sbaragli S., Mammarella I. (2010) *L'apprendimento della Geometria*

[18] Tornar C. (2001). *Il processo didattico tra organizzazione e controllo.* Roma: Monolite Editrice.

Sitografia

[19] Indicazioni Nazionali per i Licei, `www.nuovilicei.indire.it`

[20] Prove Invalsi, `www.invalsi.it`