

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

# ONDE GRAVITAZIONALI TEORIA E RIVELAZIONE

Relatore:  
Dott. Roberto Casadio

Presentata da:  
Samuele Montefiori

Sessione III  
Anno Accademico 2015/2016



*A Mia.*

## Sommario

Nel redarre la tesi si è perseguito l'intento di illustrare la teoria alla base delle onde gravitazionali e dei metodi che ne consentono la rivelazione. È bene tenere presente che con il seguente elaborato non si sta proponendo, in alcun modo, una lettura da sostituire ad un testo didattico. Pur tuttavia, si è cercato di presentare gli argomenti in maniera tale da emulare l'itinerario formativo di uno studente che, per la prima volta, si approccia alle nozioni, non immediatamente intuitive, ivi descritte. Quindi, ogni capitolo è da interpretarsi come un passo verso la comprensione dei meccanismi fisici che regolano produzione, propagazione ed infine rivelazione delle perturbazioni di gravità.

Dopo una concisa introduzione, il primo capitolo si apre con il proposito di riepilogare i concetti basilari di geometria differenziale e relatività generale, gli stessi che hanno portato Einstein ad enunciare le famose equazioni di campo. Nel secondo si introduce, come ipotesi di lavoro standard, l'approssimazione di campo debole. Con questa condizione al contorno (per mezzo delle trasformazioni dello sfondo di Lorentz e di gauge) si manipolano le equazioni di Einstein, ottenendo la legge di gravitazione universale newtoniana.

Il terzo capitolo sfrutta le analogie tra equazioni di campo elettromagnetiche ed einsteiniane, mostrando con quanta naturalezza sia possibile dedurre l'esistenza delle onde gravitazionali. Successivamente ad averne elencato le proprietà, si affronta il problema della loro propagazione e generazione, rimanendo sempre in condizioni di linearizzazione. È poi la volta del quarto ed ultimo capitolo. Qui si avvia una dissertazione sui processi che acconsentono alla misurazione delle ampiezze delle radiazioni di gravità, esibendo le idee chiave che hanno condotto alla costruzione di interferometri all'avanguardia come LIGO. Il testo termina con uno sguardo alle recenti scoperte e alle aspettative future.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>Prima di partire</b>	<b>5</b>
<b>1 Relatività generale</b>	<b>6</b>
1.1 Spaziotempo curvo . . . . .	6
1.2 Fisica sugli spazi curvi . . . . .	8
1.3 Geodetiche e trasporto parallelo . . . . .	11
1.4 Deviazione geodetica e distanza propria . . . . .	13
1.5 Equazioni di campo di Einstein . . . . .	15
1.6 Considerazioni sulle costanti . . . . .	17
<b>2 L'approssimazione di campo debole</b>	<b>18</b>
2.1 Necessità di un'approssimazione . . . . .	18
2.2 Campi gravitazionali deboli . . . . .	18
2.3 Equazioni di campo debole . . . . .	20
2.4 Introduzione alle onde gravitazionali . . . . .	22
2.5 Limite newtoniano . . . . .	22
2.6 Gravitazione newtoniana . . . . .	24
<b>3 Onde gravitazionali</b>	<b>27</b>
3.1 Onde elettromagnetiche e gravitazionali . . . . .	27
3.2 Equazioni di Einstein nel vuoto . . . . .	30
3.3 Oscillazioni di quadrupolo . . . . .	33
3.3.1 Libertà di gauge . . . . .	37
3.4 Teorema del viriale tensoriale . . . . .	38
3.5 Effetti delle onde . . . . .	40
3.6 I due stati di polarizzazione . . . . .	43
<b>4 Rivelazione delle onde</b>	<b>45</b>
4.1 Come misurare gli effetti delle onde . . . . .	45

4.2	Distanza propria e luce . . . . .	47
4.3	Rivelatori a fascio . . . . .	49
4.4	Interferometri . . . . .	50
4.5	LIGO . . . . .	52
4.6	I due rivelatori di LIGO . . . . .	53
	4.6.1 Isolamento . . . . .	54
4.7	Che cosa ha visto LIGO? Il futuro delle onde gravitazionali . . . . .	55

<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>
---------------------	-----------

# Introduzione

Alla base di ogni disciplina scientifica vi è l'osservazione. È stata infatti l'analisi della realtà circostante che ha portato l'uomo alle scoperte più eclatanti. Senza la natura, da sempre fonte d'ispirazione, non si sarebbe mai potuti pervenire alle invenzioni, che ogni giorno, agevolano la vita degli esseri umani. La necessità di osservare l'universo, per entrare in possesso di nozioni sempre più complesse ed articolate, da poter poi usare a proprio vantaggio, ha accompagnato l'uomo sin dall'alba dei tempi. Questo innato bisogno lo ha condotto alla ricerca di nuovi fenomeni da cui trarre insegnamento, costruendo strumenti che gli permettano di scrutare sempre più cose, sempre più lontano.

In questo contesto spiccano i grandi progressi compiuti dall'astronomia, che procede di pari passo all'evolversi della tecnologia. Infatti, prima degli anni '50 si poteva investigare solamente lo spettro visibile, e oggetti come quasar, pulsar o buchi neri erano totalmente sconosciuti. Solo dopo lo sviluppo di attrezzature, verso la metà degli anni '60, che concedevano di scandagliare nuove regioni delle lunghezze d'onda elettromagnetiche, questi elementi poterono essere individuati.

Ma se ci fosse un modo per vedere tutto l'universo, e non soltanto la piccola porzione offerta dalla luce stellare? Se si potesse entrare in possesso delle informazioni di qualsiasi oggetto nel cosmo, semplicemente analizzando l'impronta che lascia sullo spaziotempo? Si parla in questo caso di *onde gravitazionali*. Esse rappresentano niente meno che un'increspatura dello spaziotempo, che la relatività generale afferma essere emesse da *tutti* i fenomeni astrofisici.

Teorizzate nel 1916, la prova della loro esistenza non arrivò fino al 1974, con la scoperta, da parte di Hulse e Taylor, di una pulsar binaria, lo stesso tipo di sistema che Einstein indicò come banco di prova per testare ogni suo enunciato. I due, insigniti del premio Nobel solo nel 1993, cominciarono subito a misurare il periodo di rotazione delle stelle e, dopo 8 anni di osservazioni, conclusero che questo stava cambiando nel tempo con il medesimo tasso anticipato dal brillante scienziato. Le due pulsar stavano tramutando la propria energia rotazionale in onde gravitazionali. Ad oggi, dopo oltre 40 anni, i dati raccolti si adattano così bene alla relatività generale che non rimane più alcun dubbio: il sistema emette radiazione gravitazionale.

Si pensi alle informazioni, attualmente precluse, di cui si potrebbe entrare in possesso disponendo dei rivelatori adeguati! Per fare un esempio, le radiazioni (elettromagneti-

che) sviluppatasi in un'esplosione di supernova sono diffuse innumerevoli volte dal denso involucro della stella, perdendo la maggior parte delle informazioni trasportate. Al contrario, le onde gravitazionali, causa la debole interazione con la materia, si propagherebbero indisturbate per tutto lo spazio, permettendo di indagare direttamente il cuore delle esplosioni. In linea di principio sarebbe anche possibile captare le OG<sup>1</sup> generate durante il Big Bang, nei primissimi istanti di vita dell'universo.

Le difficoltà tecniche implicate nella rivelazione sono enormi. Per citarne subito alcune: le ampiezze  $h_{\mu\nu}$  delle perturbazioni della metrica, da cui le onde si originano, sono eccezionalmente piccole, e gli strumenti utilizzati per misurarle si contraggono ed aspiandono, solidali con lo spaziotempo. Tuttavia, la caccia alle onde non si arresta e, nel settembre del 2015, arriva la conferma. LIGO e VIRGO, due colossali interferometri laser, capolavoro dell'ingegneria moderna, captano l'arrivo di onde gravitazionali. È questione di un attimo, ma comunque abbastanza per attribuirne la paternità al *merging* di due buchi neri, avvenuto a 1.3 miliardi di anni luce dalla Terra. Inutile dire che con questi nuovi osservabili si presenta l'opportunità di studiare direttamente i buchi neri (e forse anche la materia oscura), inerti alle interazioni elettromagnetiche.

Nei capitoli successivi si darà una descrizione del problema, cominciando con il riassumere gli aspetti salienti della relatività generale Einsteiniana, la cui conoscenza è imprescindibile per gli scopi preposti.

---

<sup>1</sup>Onde Gravitazionali.

# Prima di partire

Nel corso del testo si fa spesso ricorso a quantità tensoriali, le cui componenti, in accordo alle usuali norme del formalismo tensoriale, sono espresse mediante la combinazione di opportuni indici. Per questi è riservata una convenzione particolare, a seconda dell'insieme entro cui possono essere scelti.

L'analisi che si sta per intraprendere porta a muoversi esclusivamente al di sopra di una varietà quadridimensionale, lo spaziotempo, vincolando un qualsiasi indice a poter assumere un massimo di quattro valori: 0, 1, 2 e 3. Generalmente, difatti, si adotta una lettera greca, come  $\alpha$ , per designare quest'eventualità:

$$\alpha \in (0; 1; 2; 3).$$

Tuttavia, può capitare che per qualche ragione la collezione si riduca. In particolare, se ad essere esclusa fosse soltanto la componente 0, sarebbe soppressa la lettera greca in favore di una latina, ad esempio  $i$ :

$$i \in (1; 2; 3).$$

Sovente ci si riferisce agli indici del secondo caso chiamandoli “indici spaziali”, per il ruolo che ricoprono nello specificare le componenti di un quadrivettore evento:  $A = (A^0; A^1; A^2; A^3) = (t; x; y; z)$ . Sempre per questa ragione, a volte per i valori di  $i$  si trova scritto

$$i \in (x; y; z)$$

(vedi Schutz, 2009 [2]).

# Capitolo 1

## Relatività generale

Con la relatività generale è abbandonata l'idea newtoniana di interazione gravitazionale. Non più percepita come un'azione a distanza fra corpi massivi, si preferisce l'interpretazione che la vede essere l'effetto “collaterale” della geometria (più specificamente, la curvatura) dello spaziotempo. In particolare si vedrà come la stessa geometria determini non solo la gravità, ma anche quali siano i sistemi di riferimento inerziali: quelli associati a osservatori in caduta libera. Tuttavia, i concetti matematici rigorosi e non banali, entro cui la teoria affonda le sue radici, si rivelano così potenti da consentire la scrittura di equazioni nella stessa forma in *qualsiasi* sistema di riferimento, inerziale e non. Tutto ciò è codificato nel

*Principio di relatività generale:* le leggi della fisica sono le stesse in ogni sistema di riferimento.

L'obiettivo del capitolo è arrivare a scrivere le famose equazioni di campo di Einstein, ricapitolando in primis come portare avanti lo studio di una particella relativistica in moto su una varietà dotata di curvatura.

Anzitutto si veda in quale modo determinare la curvatura dello spaziotempo.

### 1.1 Spaziotempo curvo

Nell'ambito della geometria differenziale il concetto di curvatura è strettamente connesso alle proprietà di trasporto parallelo lungo percorsi orientati, tanto che la sua definizione si può dare nella seguente maniera.

Sia  $\mathcal{M}$  una varietà differenziabile su cui sia definito un meccanismo per il trasporto parallelo di vettori lungo percorsi orientati. Allora:

se nello spostare un generico vettore  $\mathbf{V}$ , lungo un percorso chiuso  $(\gamma)$ , non ritornasse parallelo a se stesso,  $\mathcal{M}$  si direbbe *a curvatura non nulla* o, più semplicemente, *curva*.

Per tradurre tutto questo in linguaggio matematico si deve scendere più in dettaglio. Per cui si definisca in un punto A di  $\mathcal{M}$  il vettore  $\mathbf{V}$ , e se ne effettui il trasporto parallelo<sup>1</sup> lungo linee coordinate. Con riferimento alla figura 1.1, si segua prima  $x^\alpha$ , giungendo al

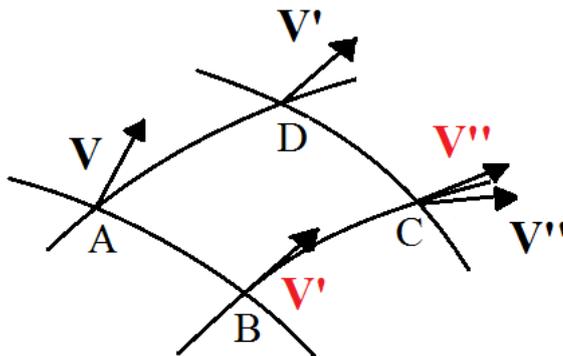


Figura 1.1: Un esempio di trasporto parallelo. Notare come i  $\mathbf{V}''$  in nero e in rosso, risultanti da due diversi modi di muovere il vettore iniziale, non coincidano. Sebbene non specificato in figura, i quattro percorsi disegnati corrispondono a curve parallele ai vettori coordinati. Il tragitto da A a B è associato a  $x^\alpha$ , quello da B a C a  $x^\beta + \delta x^\beta$ . Infine, mentre per andare da A a D si sta seguendo  $x^\beta$ , da D a C ci si sta muovendo su  $x^\alpha + \delta x^\alpha$ .

punto B, e successivamente  $x^\beta + \delta x^\beta$ , fino a raggiungere C. Si ripeta poi il medesimo procedimento invertendo l'ordine di transito: si attraversi  $x^\beta$  fino al punto D, e infine  $x^\alpha + \delta x^\alpha$  arrivando ancora in C. Ricorrendo alla derivata covariante  $\nabla_\alpha$  ( $\nabla_\beta$ ) si può valutare il cambiamento quantitativo di  $\mathbf{V}$ , mentre è spostato lungo  $x^\alpha$  ( $x^\beta$ ). È chiaro che, per come si è definita la curvatura, le modifiche subite sopra il primo cammino e quelle riportate sul secondo, generalmente, dovranno non coincidere. In formule:

$$[\nabla_\alpha; \nabla_\beta]V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu \neq 0. \quad (1.1)$$

$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$  è il tensore di Riemann, l'oggetto attraverso cui si manifesta la curvatura degli spazi non piatti. Questo risulta univocamente determinato dalla metrica  $g_{\mu\nu}$  di  $\mathcal{M}$ , e il loro profondo legame è sancito dalla relazione:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\beta,\nu\alpha} - g_{\sigma\alpha,\nu\beta} + g_{\nu\alpha,\sigma\beta} - g_{\nu\beta,\sigma\alpha}). \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Si può pensare al trasporto parallelo come ad un insieme di regole volte a stabilire se due vettori, definiti in due punti differenti di una stessa varietà generica, siano o meno paralleli. Non sono che semplici convenzioni, scelte arbitrariamente, con l'unica clausola che rispettino la concezione intuitiva di parallelismo se applicate ad una varietà euclidea.

Ovviamente poi il tensore di Riemann si annulla solo se

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0 \iff \text{Varietà piatta}^2.$$

Chiaramente, per poter affermare che lo spaziotempo sia curvo deve verificarsi un fenomeno analogo a quello appena illustrato.

Si prenda in esame una stazione spaziale, a bordo della quale, definendo tre vettori spaziali, è allestito un sistema di riferimento inerziale orbitante attorno ad un osservatore a terra. Quest'ultimo vedrebbe l'oggetto descrivere una traiettoria ellittica, e nel mentre assisterebbe alla rotazione dei tre vettori spaziali e di quello temporale, tangente alla suddetta traiettoria: è così presentato un vero e proprio meccanismo per il trasporto parallelo. Introducendo una seconda stazione, e applicando la medesima costruzione di sistema inerziale, si è in grado di combinare con continuità i due sistemi, ottenendone uno unico:  $\mathcal{S}$ . Tuttavia, causa la diversa velocità angolare delle stazioni<sup>3</sup>, eseguire in  $\mathcal{S}$  il trasporto parallelo di un qualsiasi vettore lungo un percorso chiuso, tralasciando per un momento la violazione di causalità, porta ad un vettore differente dall'originale, riflettendo il non annullarsi del tensore di Riemann. Lo spaziotempo è curvo (vedi Casadio, 2015 [1]).

Appurato questo fatto, si presenta un nuovo dilemma: come si comporta un oggetto su una varietà curva?

## 1.2 Fisica sugli spazi curvi

All'incipit del capitolo si è fatto presente che, in relatività generale, gli unici e i soli sistemi inerziali, per comodità indicati con  $\mathcal{I}$ , sono quelli corrispondenti ad osservatori in caduta libera. Questa asserzione discende da considerazioni fisiche prettamente elementari.

Si immagini di preparare una particella all'interno di un campo gravitazionale non uniforme e di porsi solidali con essa. Il sistema di riferimento così predisposto (di tipo  $\mathcal{I}$ ) osserverà la particella, inizialmente immobile, rimanere indefinitamente a riposo. Tuttavia il costruito è valido solo in prossimità della particella in questione, ovvero *localmente*. Infatti la non uniformità del campo gravitazionale impone che il sistema debba essere limitato nello spaziotempo per poter essere di tipo  $\mathcal{I}$ , impedendo la realizzazione di un riferimento globale dotato della stessa qualifica (il fenomeno di redshift gravitazionale supporta questa conclusione).

Consapevoli di ciò, sarà poi merito degli esperimenti rivelare la metrica che contraddistingue la caduta libera. La grande efficacia con cui la relatività ristretta ne riproduce gli

---

<sup>2</sup>Siccome ogni principio di geometria differenziale, compreso quello ora riprodotto, dovrebbe essere noto al momento della lettura, non si approfondirà ulteriormente l'argomento.

<sup>3</sup>Trovandosi in orbita su traiettorie diverse, la velocità di rotazione sarà inevitabilmente diversa.

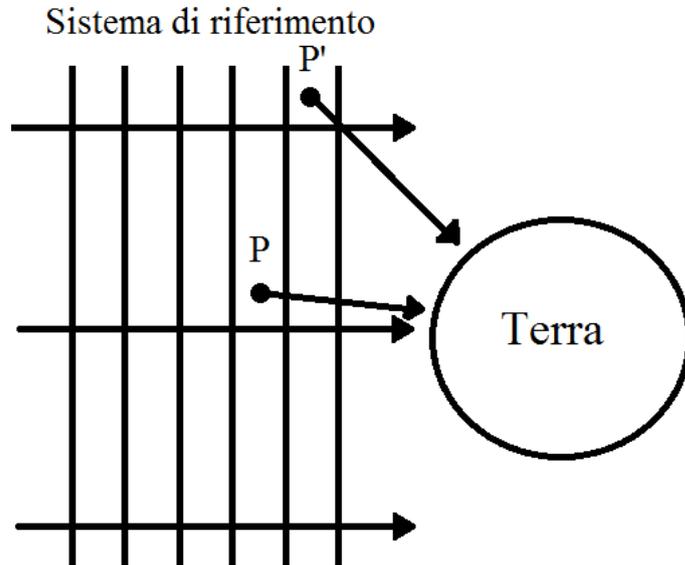


Figura 1.2: La figura mostra come un sistema di riferimento troppo ingombrante sia di fatto non inerziale. Due particelle molto distanti non ammetteranno lo stesso tipo di descrizione.

esiti porta ad identificare i sistemi di tipo  $\mathcal{I}$  con quelli inerziali di *Lorentz*, naturalmente caratterizzati dalla metrica locale di Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu}.$$

Per cui, trovandosi nella necessità di dover descrivere un dato evento sullo spaziotempo, è sufficiente collocare nel punto in cui questo si verifica un riferimento lorentziano. Questo procedimento è sempre attuabile dal momento che è un teorema a stabilirlo:

In ogni particolare punto  $\mathcal{P}$  della varietà, su cui sia assegnata una generica metrica  $g_{\mu\nu}$ , è *sempre* possibile "trovare" un sistema di coordinate  $\{x^{\mu'}\}$  tale per cui  $g_{\mu'\nu'}$  sia *localmente*, e approssimativamente, in forma minkowskiana. Cioè:

$$g_{\mu'\nu'}(x^{\mu'}) = \eta_{\mu'\nu'} + 0[(x^{\mu'})^2] \quad (1.3)$$

(con le parentesi si è resa esplicita la dipendenza dal punto  $\mathcal{P} \equiv x^{\mu'}$ ). L'enunciato è equivalente ad affermare che lo spaziotempo curvo totale ha come spazio tangente uno spaziotempo piatto.

Ora, il quesito conclusivo della sezione precedente non solo accoglie una semplice soluzione, ma consente anche di pervenire a due importanti principi della relatività generale. Anzitutto ci si stabilisca di nuovo comoventi ad una particella in caduta libera. Si valuta che, come in ogni sistema inerziale, il corpo è privo di accelerazione,  $\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = 0^4$ , e procede di moto uniforme seguendo linee rette locali, corrispondenti alla definizione di *geodetiche* nella varietà totale. Si ha il

*Principio di equivalenza debole:* particelle in caduta libera si muovono lungo geodetiche di tipo-tempo dello spaziotempo.

Questo potente postulato, la cui attendibilità è testata con continui esperimenti, è tuttavia ristretto alle sole particelle, da qui l'aggettivo *debole*, ed esige una generalizzazione nel:

*Principio di equivalenza di Einstein:* un qualsiasi esperimento, che non chiami in causa campi definiti su regioni troppo estese e non coinvolga la gravità, se svolto in un sistema  $\mathcal{I}$ , avrà il medesimo risultato di quello che si avrebbe ripetendolo nello spaziotempo piatto lorentziano.

In pratica si sta affermando che, a livello locale, la gravità non introduca niente di nuovo: i suoi effetti sono percepiti soltanto qualora siano considerate vaste regioni spaziotemporali. La stessa forza peso risulta così una forza apparente sperimentata nei riferimenti non inerziali (vedi Schutz, 2009 [2]).

Si tenga presente che nei sistemi di Lorentz, le equazioni tensoriali si prestavano egregiamente a descrivere tutte le leggi fisiche. Dalla geometria differenziale è noto come queste costituiscano un metodo di descrizione invariante. Ricavata, infatti, l'espressione di una data legge (in un sistema  $\mathcal{I}$ ), la semplice sostituzione in essa delle derivate parziali con quelle covarianti permette di ottenere una formula legittima in un sistema di riferimento *generale*, sancendo di fatto la validità del PRG<sup>5</sup>. Tutto questo è incorporato nel:

*Principio di covarianza generale:* le leggi della fisica in un sistema di riferimento generale si ottengono da quelle della relatività ristretta rimpiazzando le quantità tensoriali locali con quelle appartenenti alla varietà spaziotemporale complessiva.

e il problema del moto su una varietà curva può dirsi chiarito (vedi Casadio, 2015 [1]).

Adesso, resta solo da capire come quanto detto possa essere d'aiuto nel costruire una teoria relativistica della gravitazione, e stabilire che cosa generi la curvatura (o, da (1.2), la metrica) nello spaziotempo. È chiaro che per individuare queste *sorgenti* si dovrà partire (per forza) dall'equazione di campo di Newton

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{1.4}$$

---

<sup>4</sup> $\mathbf{U}$  fa le veci della velocità della particella e  $\tau$  in quelle del tempo proprio.

<sup>5</sup>Principle of General Relativity, ovvero principio di relatività generale

e la sua soluzione  $\phi = -\frac{Gm}{r}$  ( $\rho$  è la densità di massa). Il problema verrà ripreso nella sezione 1.5, dopo che si sarà delucidato, in maniera più rigorosa, alcune delle nozioni chiave citate sinora: trasporto parallelo, geodetiche ed effetti della curvatura.

### 1.3 Geodetiche e trasporto parallelo

In vista dell'uso che si farà delle geodetiche nel prossimo capitolo, è comodo reintrodurre questo concetto, alla base della geometria differenziale. Ci si posizioni in un punto  $\mathcal{P}$  di una varietà  $\mathcal{M}$ , su cui siano definiti:

- un vettore  $\mathbf{V}$ ;
- una curva  $\gamma$ , parametrizzata da  $\lambda$ ;
- un meccanismo per il trasporto parallelo;

e si proceda a scrivere un'equazione per il trasporto parallelo di  $\mathbf{V}$  lungo la curva  $\gamma$ . Un teorema illustrato nella sezione precedente concede di fissare in  $\mathcal{P}$  un sistema di tipo  $\mathcal{I}$ , in cui cioè (a) la metrica sia quella di Minkowski, e (b) i calcoli notevolmente più semplici. È chiaro che per trasportare parallelamente  $\mathbf{V}$  si dovrà imporre sulle sue componenti  $V^\alpha$  la condizione

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0 \text{ in } \mathcal{P},$$

ovvero devono rimanere costanti mentre vengono spostate da  $\mathcal{P}$  lungo  $\gamma$ . Se poi si indicassero con  $\{x^\mu\}$  gli assi coordinati si potrebbe usufruire della regola della catena per riscrivere la derivata

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{dx^0} \frac{dx^0}{d\lambda} + \frac{dV^\alpha}{dx^1} \frac{dx^1}{d\lambda} + \frac{dV^\alpha}{dx^2} \frac{dx^2}{d\lambda} + \frac{dV^\alpha}{dx^3} \frac{dx^3}{d\lambda} = 0, \quad (1.5)$$

dove si riconoscerebbero in  $(\frac{dx^0}{d\lambda}, \frac{dx^1}{d\lambda}, \frac{dx^2}{d\lambda}, \frac{dx^3}{d\lambda})$  le componenti  $U^\mu$  di  $\mathbf{U}$ , il vettore tangente alla curva che ha  $\lambda$  come parametro. Per cui in notazione di Einstein la (1.5) appare:

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\mu V^\alpha_{,\mu} = 0, \quad (1.6)$$

che in virtù del PGC<sup>6</sup> acquista autenticità in un sistema generale qualora la derivata parziale sia rimpiazzata dalla covariante. Infatti, si tenga presente che i due tipi di derivata sono legati da

$$V^\alpha_{;\mu} = V^\alpha_{,\mu} + V^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\mu}, \quad (1.7)$$

---

<sup>6</sup>Principle of General Covariance, ovvero principio di covarianza generale.

dove  $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$  sono i simboli di Christoffel, definiti da

$$\Gamma^\alpha_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(g_{\sigma\beta,\mu} + g_{\sigma\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\sigma}). \quad (1.8)$$

Ricordando che in  $\mathcal{P}$  è stato posto un riferimento inerziale, con  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , (1.8) porta a  $\Gamma^\alpha_{\beta\mu} = 0$ , che giustifica

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\mu V^\alpha_{;\mu} = U^\mu V^\alpha_{;\mu} = 0. \quad (1.9)$$

Questa è presto assunta a definizione di trasporto parallelo del vettore  $\mathbf{V}$  lungo  $\mathbf{U}$ , e indicata con:

$$U^\mu V^\alpha_{;\mu} = \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{V} = 0. \quad (1.10)$$

Un aiuto visivo al procedimento descritto giunge dalla figura 1.3.

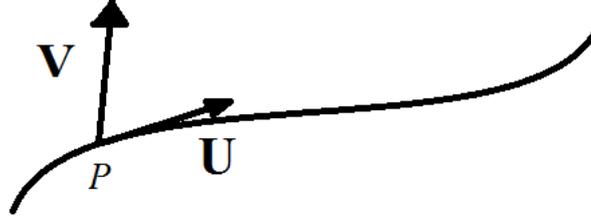


Figura 1.3: Il vettore  $\mathbf{V}$  sta per essere trasportato sopra la curva  $\gamma$  (avente  $\mathbf{U}$  come tangente), passante per il punto  $\mathcal{P}$ , su cui è definito.

Si inserisce a sua volta la definizione di geodetica come curva,  $\gamma'$ , che trasporta la propria tangente,  $\mathbf{T}$ , parallelamente a se stessa, ovvero (sfruttando la (1.10)):

$$T^\mu T^\alpha_{;\mu} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} = 0.$$

Esplicitando le componenti  $T^\mu$ , facendo uso del parametro  $\tau$  che descrive l'evoluzione della geodetica, si ha:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (1.11)$$

Il numero reale che parametrizza la geodetica, in questo caso  $\tau$ , è detto *parametro affine*. In genere se  $\tau$  è un parametro affine allora lo è anche

$$\sigma = a\tau + b, \quad (1.12)$$

se  $a$  e  $b$  sono costanti (vedi Schutz, 2009 [2]).

## 1.4 Deviazione geodetica e distanza propria

A questo punto ci si potrebbe chiedere come la curvatura agisca sulle geodetiche. Tanto per cominciare, si è già visto (equazione (1.1)) che il trasporto di un vettore  $V^\alpha$  lungo un percorso chiuso dipende dal tensore di Riemann, risultando diverso da se stesso nell'eventualità in cui  $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \neq 0$  e la curvatura non sia nulla. Dunque, per le linee geodetiche, si può ponderare l'idea di fare un discorso analogo. Di fatto, se vi fossero due di queste curve inizialmente parallele, per esempio  $\gamma$  e  $\gamma'$ , sarebbe lecito supporre che non rimangano tali se estese al di sopra di una varietà curva, assistendo, invero, ad un allontanamento (avvicinamento) delle relative traiettorie. Questo è esattamente ciò che accade.

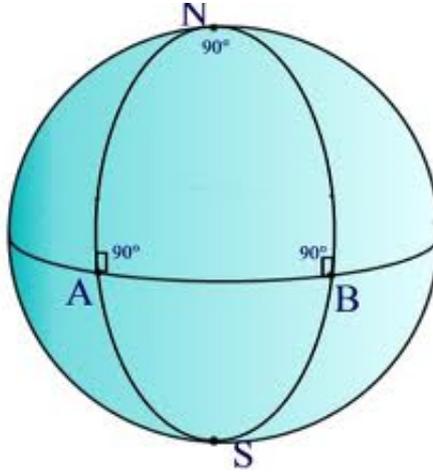


Figura 1.4: Su una sfera, la varietà curva per eccellenza, due rette geodetiche che partono perpendicolari all'equatore si incontrano ai poli.

Per vederlo in termini più rigorosi è bene introdurre il concetto di *distanza propria*. In relatività ristretta si sente spesso parlare di lunghezza propria, o lunghezza a riposo, ovvero la lunghezza  $L_0$  di un oggetto  $Z$  misurata da un osservatore in quiete con esso. Dal momento che tutti gli osservatori comoventi con  $Z$  misureranno la medesima quantità  $L_0$ , si potrebbe pensare di usare la lunghezza propria come metodo di misura. Tuttavia, ogni qualvolta si desidera entrare in possesso di una grandezza suscettibile di un confronto, si dovrebbe restare nel sistema di riferimento solidale all'ente da misurare, processo scomodo e frequentemente irrealizzabile. Si rende necessaria l'importazione di un nuovo criterio per misurare le distanze, la distanza propria per l'appunto.

Nello spaziotempo si definisce distanza propria, esistente tra due eventi  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$ , l'integrale della radice quadrata dell'elemento di linea della metrica,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.13)$$

lungo una curva  $\Psi$  di tipo-spazio passante per i due punti in questione:

$$L \equiv \int_{\text{lungo } \Psi} \sqrt{|g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|} = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \sqrt{|g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\psi} \frac{dx^\beta}{d\psi}|} d\psi \quad (1.14)$$

( $\psi$  è il parametro lungo  $\Psi$ ,  $\psi_0 = \mathcal{P}$  e  $\psi_1 = \mathcal{P}'$ ). Notando poi che  $\frac{dx^\alpha}{d\psi} = V^\alpha = \mathbf{V}$  è la tangente a  $\Psi$  si ha anche (sfruttando la definizione di prodotto scalare)

$$L = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \sqrt{|\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}|} d\psi \quad (1.15)$$

(vedi Schutz, 2009 [2]). Ricapitolando, quando si ha a che fare con spazi dotati di curvatura le tradizionali nozioni di vicinanza sono ambigue e, spesso e volentieri, conducono ad una precisazione *non univoca* degli intervalli sulla varietà. Fortunatamente però si può parlare di distanza propria. Dato che ogni osservatore vede la stessa curva e la stessa<sup>7</sup> metrica in prossimità dei punti d'interesse, questo espediente costituisce un metodo di misura invariante dalle coordinate, uguale per ogni riferimento.

Adesso si ritorni a contemplare le due geodetiche di prima,  $\gamma$  e  $\gamma'$ , e si inseriscano nel problema le seguenti condizioni al contorno. In una varietà differenziabile  $\mathcal{M}$  vi siano quindi  $\gamma$  e  $\gamma'$ , passanti rispettivamente per i punti  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$ , molto *vicini*<sup>8</sup>, e aventi tangenti  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$ . In particolare si assuma che il trasporto parallelo, assegnato su  $\mathcal{M}$ , constati il loro parallelismo in  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$ . In altre parole  $\mathbf{T}(\mathcal{A}) // \mathbf{T}'(\mathcal{A}')$ . Infine, dopo aver ipotizzato che i rispettivi parametri affini siano indicati con  $\tau$  e  $\tau'$ , e che  $\tau_0 = \mathcal{A}$ ,  $\tau'_0 = \mathcal{A}'$ , si tracci il “vettore di connessione”  $\mathbf{C}$  tale che raggiunga una geodetica partendo dall'altra, collegando punti parametrizzati dagli stessi valori di  $\tau$  e  $\tau'$  (vedi figura 1.5).

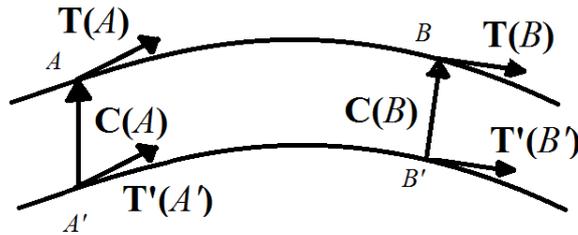


Figura 1.5: Il vettore di connessione  $\mathbf{C}$  connette punti sulle geodetiche parametrizzati dallo stesso numero reale. Nell'immagine, i punti il cui nome differisce soltanto per l'accento corrispondono allo stesso  $\tau$  ( $=\tau'$ ).

<sup>7</sup>Ovviamente curva  $\Psi$  e metrica  $g_{\alpha\beta}$  possono avere forme funzionali diverse in sistemi di riferimento differenti, ma il risultato di (1.14) non cambia.

<sup>8</sup>Grazie a (1.14) questo aggettivo non si presta ad equivoci.

A questo punto, se effettivamente fosse vero quanto enunciato a inizio sezione, ci si dovrebbe aspettare che il vettore di connessione  $C^\alpha$  risulti modificato dal progredire del valore  $\tau = \tau'$ . Una trattazione completa del problema, omissa in quanto esula dagli obiettivi della tesi, sfocia nella cosiddetta equazione di *deviazione geodetica*

$$\nabla_{\mathbf{T}}\nabla_{\mathbf{T}}C^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}T^\beta T^\mu C^\nu. \quad (1.16)$$

di immediata interpretazione (vedi Schutz, 2009 [2]). Le geodetiche non mantengono la propria separazione all'interno di spazi curvi. E c'è di più. Si è appena mostrato, dal punto di vista matematico, che a cavallo di una varietà caratterizzata da curvatura non nulla, come lo spaziotempo deformato da un campo gravitazionale, si assiste alla comparsa di *forze mareali*<sup>9</sup>. Quest'informazione ha una portata spaventosa: l'aver messo in relazione le forze mareali con il tensore di Riemann decreta, a tutti gli effetti, la possibilità di fabbricare una teoria relativistica della gravitazione, che, come ci si era proposti, veda nella curvatura spaziotemporale la responsabile della forza di gravità. Bisogna solo generalizzare (1.4).

## 1.5 Equazioni di campo di Einstein

Nella controparte relativistica di (1.4), il responsabile del campo gravitazionale non sarà più semplicemente  $\rho$ , bensì una sua significativa astrazione. La densità di energia totale relativistica, anch'essa indicata con  $\rho$ , si presta ad essere un buon candidato. Effettivamente la sua espressione nel sistema di riferimento comovente con la distribuzione di massa restituisce proprio la densità di massa stessa. Tuttavia l'approccio invariante prescrive l'impiego di quantità tensoriali, suggerendo, piuttosto, l'uso di un tensore che annoveri  $\rho$  tra le componenti. Fra tutti si è scelto il *tensore energia-impulso*  $T$ , le cui componenti sono esplicitate nella figura 1.6. Questo è un tensore  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , simmetrico e covariantemente conservato

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (1.17)$$

assemblato a partire dalla materia contenuta nel sistema.

Individuata la causa del campo si può presentare una prima universalizzazione di (1.4):

$$\mathbf{D}(g) = kT, \quad (1.18)$$

in cui  $k$  è una costante da determinare e  $\mathbf{D}$  l'operatore differenziale agente su  $g$ , la metrica. Notare come non compaia il campo  $\phi$ , ma  $g$ . Infatti una teoria che si propone di spiegare la gravità dal punto di vista geometrico dovrà includere, ad un certo punto, *una relazione*

$$\phi(g), \quad (1.19)$$

---

<sup>9</sup>Sono quelle che, come si è visto, causano la divergenza delle traiettorie di due particelle poste in prossimità.

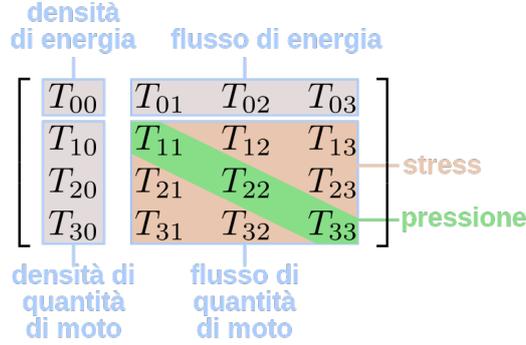


Figura 1.6: Il tensore energia-impulso e il ruolo delle sue componenti.

tra le due. In luogo dell'unica (1.4) ora si hanno le 10 relazioni ( $T$  è simmetrico) racchiuse in (1.18) (vedi Schutz, 2009 [2]).

Una similitudine con (1.4) suggerisce di selezionare  $\mathbf{D}$  tra gli operatori differenziali del secondo ordine, a patto che coinvolgano  $g_{\mu\nu}$  e derivate. Il tensore di Ricci,  $R^{\alpha\beta}$ , corrisponde al profilo, e la sua combinazione con scalare di Ricci,  $R$ , e metrica autorizza ad eliminare  $\mathbf{D}$  dalle incognite:

$$\mathbf{D}^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta}.$$

Mentre  $\Lambda$  è una costante destinata a rimanere arbitraria, si riesce a specificare  $\mu$  prendendo in considerazione la proprietà (1.17), che implica  $\mathbf{D}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$  e quindi:

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0, \quad (1.20)$$

dove si è già usato il fatto che  $g^{\alpha\beta}{}_{;\nu} = 0$ . La (1.20) veste i panni di un'identità lecita per un  $g$  arbitrario solo se  $\mu = -\frac{1}{2}$ , quando cioè ci si trova davanti al tensore di Einstein

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R. \quad (1.21)$$

Nel qual caso la (1.20) viene detta identità di Bianchi, e indicata

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0.$$

Nella forma rinnovata le (1.18) si leggono

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}, \quad (1.22)$$

in cui sono conosciute con il nome di *equazioni di campo di Einstein* (vedi Schutz, 2009 [2]).

## 1.6 Considerazioni sulle costanti

Prima di procedere oltre è doveroso spendere due parole circa le costanti coinvolte e l'uso che se ne fa. Fra tutte spicca  $\Lambda$ , detta anche *costante cosmologica*. Inizialmente assente, è stata introdotta da Einstein al fine di ottenere soluzioni cosmologiche statiche per il comportamento a larga scala dell'universo, anche se, con le più recenti prove della sua espansione, egli stesso arrivò a identificarla come un grande errore (vedi Casadio, 2015 [1]). Nonostante oggi sia risaputo che  $\Lambda \neq 0$ , rappresenta in ogni caso una quantità molto piccola, e può essere trascurata.

Il valore di  $k$ , invece, si ottiene indagando il limite newtoniano delle (1.22), quando cioè riproducono (1.4). Per ragioni di convenienza si riporta direttamente il risultato

$$k = 8\pi G,$$

posticipando la verifica di quanto enunciato al prossimo capitolo, dopo l'introduzione dei campi deboli (vedi Schutz, 2009 [2]). Ecco che le equazioni di Einstein si riducono a<sup>10</sup>:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}. \quad (1.23)$$

In questa forma l'identità di Bianchi interviene abbassando da 10 a 6 il numero di equazioni indipendenti. Si termina evidenziando che se lo spaziotempo fosse completamente vuoto, in totale assenza di materia, si avrebbe  $T^{\alpha\beta} = 0$  ovunque e, di conseguenza, la curvatura sarebbe identicamente nulla.

---

<sup>10</sup>Si è posto  $G = 1$ .

# Capitolo 2

## L'approssimazione di campo debole

Questo capitolo è dedicato interamente allo studio dell'approssimazione di campo debole. Essa consiste nel trascurare i contributi provenienti dai termini non lineari della metrica spaziotemporale. Saranno forniti gli strumenti utili ad esplicitare le (1.23) nella suddetta approssimazione, mostrando come il concetto di onda gravitazionale sia soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto. Infine si verificherà come nel limite classico le stesse equazioni riproducano la legge di Newton.

### 2.1 Necessità di un'approssimazione

Come si vedrà a momento debito, le onde gravitazionali sono debolissime. Tanto per fare un numero, l'ordine di grandezza con cui dovrebbero essere rivelate si aggira intorno a  $10^{-21}$ . Per forza di cose, quindi, devono potersi considerare come le perturbazioni, altrettanto deboli, della metrica di una varietà piatta (o quasi). Si rende più che mai necessario un contesto semplificato entro cui risolvere le altrimenti troppo complicate equazioni di Einstein. Questo nuovo quadro è proprio il campo debole, trattato nella prossima sezione.

### 2.2 Campi gravitazionali deboli

Nel precedente capitolo si è detto che in assenza di campo gravitazionale lo spazio-tempo non subisce la minima deformazione, risultando globalmente piatto con metrica minkowskiana ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ). Allo stesso modo, se la stessa varietà fosse immersa in un *campo gravitazionale debole* si potrebbe supporre che questa esponga una metrica solo approssimativamente piatta. Ciò si traduce ipotizzando l'esistenza di coordinate che ospitino una metrica della forma:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.1)$$

con

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad \text{ovunque.} \quad (2.2)$$

A questo punto è bene sfruttare la *libertà* messa a disposizione dal principio di relatività generale, e studiare la fisica da un punto di vista conveniente. Infatti, malgrado le previsioni siano valide in qualsiasi sistema coordinato, quelli che ammettono (2.1) facilitano lo svolgimento dei calcoli. Così si intraprende la ricerca di trasformazioni in grado di preservare la forma (2.1), al fine di potersi muovere, d'ora in avanti, esclusivamente tra sistemi di questo tipo.

Per esempio, eseguire una trasformazione di Lorentz<sup>1</sup> sopra a (2.1) dà

$$g_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} \eta_{\mu\nu} + \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} h_{\mu\nu}$$

che di fatto non comporta alcuna modifica nella forma. Definendo  $h_{\mu\nu}$  come un tensore

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} h_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

si ha immediatamente

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'}, \quad (2.4)$$

dal momento che la proprietà definente delle  $\Lambda$  è quella di lasciare invariata la metrica di Minkowski:  $\eta_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} \eta_{\mu\nu}$ . Ovviamente  $h_{\mu\nu}$  non è un vero tensore, ma semplicemente una parte della metrica  $g_{\mu\nu}$ . Ad ogni modo le sue proprietà di trasformazione rispecchiano quelle dei tensori in sistemi inerziali di Lorentz, dove  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . In questo contesto, uno spaziotempo lievemente curvo è concepito come varietà piatta su cui è definito il tensore  $h_{\mu\nu}$ . Queste trasformazioni vengono dette *trasformazioni dello sfondo di Lorentz* (vedi Schutz, 2009 [2]), e l'interpretazione a cui danno adito sarà impiegata a breve.

Decisamente più utili sono le trasformazioni di gauge, così chiamate in virtù dell'analogia con il mondo dell'elettromagnetismo. Esse rappresentano il concetto chiave per trattare le onde gravitazionali ed estrarre il limite classico dalle (1.23). Non sono altro che *piccoli* cambi di coordinate, che si esprimono tramite

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x^\nu), \quad (2.5)$$

generati dal vettore  $\xi^\mu$ , le cui componenti dipendono dalla posizione. Per *piccoli* si intende:

$$|\xi^{\mu, \nu}| \ll 1 \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Nel senso della relatività ristretta, con

$$\Lambda^\mu_{\alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

di modo che le matrici per il cambio verso e da le coordinate accentate  $\{x^{\mu'}\}$  siano

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} + \xi^{\mu}_{,\nu} \quad (2.7)$$

e

$$\Lambda^{\mu}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} = \delta^{\mu}_{\nu} - \xi^{\mu}_{,\nu} + 0(|\xi^{\mu}_{,\nu}|^2). \quad (2.8)$$

Come nel caso dello sfondo di Lorentz ci si può assicurare che anch'esse lascino indisturbata la metrica nella forma (2.1). Omettendo il calcolo esplicito, si ha al prim'ordine

$$g_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (2.9)$$

dove  $\xi_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \xi^{\nu}$ . Si coglie l'occasione per ricordare che per abbassare (alzare) gli indici di un qualsiasi tensore occorre iterarne la contrazione con la metrica  $g_{\mu\nu}$  (metrica inversa  $g^{\mu\nu}$ ). Ad esempio:

$$A_{\mu}^{\beta} = g_{\mu\alpha} A^{\alpha\beta}$$

e

$$A^{\mu}_{\beta} = g^{\mu\alpha} A_{\alpha\beta}.$$

Da ora in poi non sarà più indicato come gestire gli indici, dal momento che il processo appena illustrato permette di usare indistintamente le due notazioni. Tornando alla (2.9), la seconda uguaglianza non è da interpretarsi come equazione tensoriale, ma come una semplice relazione tra le componenti di un tensore espresso in due coordinate differenti,  $\{x^{\mu'}\}$  e  $\{x^{\mu}\}$ . Ne discende immediatamente che l'effetto del gauge è di trasformare  $h_{\mu\nu}$  secondo

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu'\nu'} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (2.10)$$

(vedi Schutz, 2009 [2]). Grazie alla (2.6), la  $h_{\mu'\nu'}$  nel nuovo sistema è ancora piccola e la metrica ha sempre il solito aspetto (2.1). Nella prossima sezione si vedrà come sfruttare queste trasformazioni per ridurre le equazioni di Einstein sotto il campo debole.

## 2.3 Equazioni di campo debole

La forma definitiva delle equazioni di Einstein è stata espressa al termine del capitolo 1, tramite le (1.23):

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}.$$

Non resta che sostituirvi (2.1) e vedere come i soliti campi tensoriali, quelli di Riemann e Einstein, ne risultino modificati. Al prim'ordine in  $h_{\mu\nu}$  si ha

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (2.11)$$

e

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\mu,\beta\nu} + h_{\beta\nu,\alpha\mu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}). \quad (2.12)$$

La condizione di lavorare al *prim'ordine* è fondamentale e da essa discende l'indipendenza di (2.11) e (2.12) dal gauge. Quest'invarianza trova una semplice spiegazione nella definizione che si è data per le (2.10). Infatti, in qualità di *piccoli* cambi di coordinate, il loro effetto su quantità già al prim'ordine sarebbe significativo soltanto al second'ordine, e quindi "linearmente" ininfluente. Volendo si potrebbe anche operare la stessa sostituzione per i simboli di Christoffel, definiti in (1.8), ottenendo

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(h_{\sigma\beta,\mu} + h_{\sigma\mu,\beta} - h_{\beta\mu,\sigma}). \quad (2.13)$$

Quest'equazione fornirà in futuro la possibilità di scrivere un'equazione per le geodetiche nell'approssimazione di campo debole.

Adesso, tenendo conto dell'invarianza di gauge, si introduce il nuovo tensore  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  di traccia inversa

$$\bar{h}^{\alpha\beta} := h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \quad (2.14)$$

( $h = h^{\alpha}_{\alpha}$  è la traccia di  $h_{\mu\nu}$ ). Le ragioni che portano a questa scelta sono da ricercarsi nell'eleganza con cui le equazioni di Einstein potranno essere espresse. Infatti, se si usasse  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  in luogo di  $h^{\alpha\beta}$  in  $G_{\alpha\beta}$ , si otterrebbe

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\nu} - h_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + 0(h_{\alpha\beta}^2)), \quad (2.15)$$

semplificabile tramite un gauge. In particolare, si dimostra come sia sempre possibile scegliere il *gauge di Lorentz*:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (2.16)$$

Si supponga di avere tra le mani un  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , tale che  $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$ , e di applicarvi sopra una trasformazione del tipo (2.10). Mentre le componenti della traccia inversa cambiano secondo

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu'\nu'} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}, \quad (2.17)$$

quelle della sua divergenza appaiono legate, nei due sistemi accentato e non, dalla relazione

$$\bar{h}^{\mu'\nu'}{}_{,\nu'} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu}.$$

Evidentemente la condizione (2.16) è rispettata dal tensore accentato solo nel caso in cui il vettore responsabile del gauge obbedisca all'equazione d'onda tridimensionale non omogenea

$$\xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \square\xi^{\mu} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}. \quad (2.18)$$

L'operatore D'Alambertiano rappresenta niente meno che la quadri-divergenza,  $\square = (-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2)$ , risultato della contrazione degli indici presente al primo membro di (2.18).

Fortunatamente dall'analisi matematica arriva la conferma che una simile equazione ammette *sempre*<sup>2</sup> una soluzione, che per di più non è unica. Infatti se  $\xi^\mu$  risolvesse (2.18) anche  $\xi^\mu + \theta^\mu$  potrebbe farlo. È sufficiente che valga

$$\square\theta^\mu = 0 \quad (2.19)$$

affinchè  $\square(\xi^\mu + \theta^\mu) = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$  sia valida. In ogni caso l'asserto di partenza risulta verificato.

Il gauge di Lorentz riduce la (2.15) a

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}^{\alpha\beta}, \quad (2.20)$$

che inserita nelle equazioni di Einstein ((1.23)) porta alle *equazioni di campo debole* (vedi Schutz, 2009 [2]):

$$\square\bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi T^{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

Queste sono anche conosciute come equazioni di campo di *teoria linearizzata*, proprio perchè tutti i risultati sono stati forniti ignorando ogni termine di grado superiore al primo.

## 2.4 Introduzione alle onde gravitazionali

Si immagini per un attimo di possedere gli strumenti necessari a risolvere la (2.21), indicandone la soluzione tramite  $H^{\alpha\beta}$ . Come per (2.18), questa non sarà la sola possibile. Infatti, in una teoria linearizzata come questa, la somma di  $H^{\alpha\beta}$  con una soluzione alle equazioni omogenee

$$\square\bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.22)$$

è ancora una soluzione a (2.21).

Queste sono niente meno che le equazioni di Einstein nel vuoto ( $T^{\alpha\beta} = 0$ ) e i tensori che le soddisfano prendono il nome di *onde gravitazionali*. A questo argomento sono totalmente dedicati i prossimi capitoli, perciò si riserva la fine di questo al recupero del limite newtoniano.

## 2.5 Limite newtoniano

La legge di gravitazione universale, nella formulazione scalare di Newton, descrive correttamente la situazione di oggetti all'interno del sistema solare. In particolare vede

---

<sup>2</sup>Affinchè la generica equazione  $\square f = g$  sia risolvibile,  $g$  deve soddisfare alcune condizioni sul comportamento.

un corpo, immerso in un campo gravitazionale  $\phi$ , soggetto ad una forza  $F$  di intensità pari a:

$$F = -m\nabla\phi. \quad (2.23)$$

Quindi è ovvio che, se le (2.21) funzionassero davvero, dovrebbero ricondursi alla legge in questione nelle condizioni in cui si sa essere valida. Si parla di campi gravitazionali tanto deboli da non poter produrre velocità prossime a quella della luce. Matematicamente si ha

$$|\phi| \ll 1 \quad (2.24)$$

e

$$|v| \ll 1^3. \quad (2.25)$$

La condizione di avere velocità piccole può essere utilizzata per fissare una catena di disuguaglianze tra le componenti dei tensori che figurano in (2.21),  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  e  $T^{\alpha\beta}$ . Solitamente infatti per il tensore energia-impulso vale

$$|T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}|, \quad (2.26)$$

che, tramite le (2.21), è trasmessa anche ad  $\bar{h}$ :

$$|\bar{h}^{00}| \gg |\bar{h}^{0i}| \gg |\bar{h}^{ij}|. \quad (2.27)$$

Però, a questo punto, è d'obbligo una precisazione: (2.27) consegue direttamente da (2.26) solo in assenza di onde gravitazionali significative. In caso contrario, la possibilità di sommare a una data soluzione di campo un'arbitraria soluzione omogenea, (2.22), precluderebbe l'eventualità che sia  $T$  a controllare  $\bar{h}$ , rendendo infondate le (2.27). Proprio per questa ragione non si è mai sentito parlare di radiazioni gravitazionali studiando la gravità di Newton (vedi Schutz, 2009 [2]).

Ad ogni modo, la parte dominante sembra essere

$$\square\bar{h}^{00} = -16\pi T^{00},$$

che, conoscendo la natura delle componenti di  $T$  ( $T^{00} = \rho$  quando  $|v| \ll 1$ ), diventa:

$$\square\bar{h}^{00} = -16\pi\rho. \quad (2.28)$$

Ulteriori semplificazioni nascono dal prendere in considerazione campi quasi statici, modificabili solo dal moto, a velocità  $v$ , della loro sorgente. In questo caso sarebbe il cambiamento nel tempo  $\frac{\partial}{\partial t}$  a risentirne, potendo essere messo nella seguente relazione con  $v$ :  $\frac{\partial}{\partial t} \approx v\frac{\partial}{\partial x}$ . Sempre al prim'ordine in  $v$  si avrebbe  $\square = \nabla^2$ , e:

$$\nabla^2\bar{h}^{00} = -16\pi\rho. \quad (2.29)$$

---

<sup>3</sup>Evidentemente si è posto  $c=1$

Comparandola con  $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$  si evince che le teorie di Einstein e di Newton sono conciliabili solo per

$$\bar{h}^{00} = -4\phi,$$

condizione che gli esperimenti testimoniano essere verificata. Da qui, invertendo (2.14) si possono poi stabilire le componenti del tensore

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}, \quad 4$$

che sommato alla metrica di Minkowski restituisce la metrica  $g$ .

Non è difficile vedere che gli unici termini non nulli stanno sulla diagonale

$$h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -2\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\phi \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

e che al prim'ordine, come sempre, vale<sup>5</sup>

$$h_{\alpha\beta} \approx h^{\alpha\beta}. \quad (2.31)$$

Ricordandosi di (2.1), si può finalmente scrivere la metrica dello spaziotempo newtoniano:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\phi \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Rimane solo da controllare che (2.32) sia effettivamente in accordo con la legge di gravitazione universale.

## 2.6 Gravitazione newtoniana

In quest'ultima sezione si mostrerà come ottenere l'espressione (2.23) della forza di Newton.

Si prenda in esame una particella in caduta libera. A suo tempo, il principio di equivalenza debole ne indicò le geodetiche spaziotemporali come possibili traiettorie.

---

<sup>4</sup>Come per la (2.14),  $\bar{h} = \bar{h}^\alpha_\alpha$

<sup>5</sup>Dato che:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}h^{\alpha\beta} = (\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha})(\eta_{\nu\beta} + h_{\nu\beta})h^{\alpha\beta} \approx \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}h^{\alpha\beta}$$

all'ordine più basso in  $h$ .

Per cui, indicando con  $\mathbf{V}$  la quadri-velocità della particella, se ne riesce a tracciare il moto tramite l'equazione (1.11):

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (2.33)$$

Tuttavia questa descrizione non si applica a tutti quei corpi aventi massa nulla (come il fotone). In tal caso

$$\mathbf{V} = V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \rightarrow \infty \quad \text{per qualche } \alpha.$$

Il parametro  $\tau$  rappresenta infatti il tempo proprio, nullo ( $\tau = 0$ ) per particelle non massive.

Per estendere la trattazione anche ai fotoni, invece di  $\tau$ , si dovrebbe fare uso di un parametro affine alternativo,  $\sigma$ , definito (seguendo (1.12)) in modo che non risulti singolare. Ad esempio con

$$\sigma = \frac{\tau}{m} + 0,$$

la (2.33) risulterebbe

$$m^2 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) + m^2 \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.34)$$

o analogamente, individuando in  $P^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau}$  le componenti del quadri-momento<sup>6</sup>,

$$m \frac{d}{d\tau} P^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} P^\beta P^\mu = 0. \quad (2.35)$$

L'equazione geodetica iniziale è convertita in  $\nabla_{\mathbf{P}}\mathbf{P} = 0$ .

A questo punto conviene studiare separatamente la parte spaziale ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) da quella temporale ( $\alpha = 0$ ), limitandosi, come anticipato, a campi e velocità non relativistici:  $|\phi| \ll 1$  e  $|v| \ll 1$ .

Nel primo caso, rinominando gli indici da  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  a  $i = 1, 2, 3$ , e tenendo presente che la condizione sulle velocità (2.25) impone  $P^0 \gg P^i$ , si ha

$$m \frac{d}{d\tau} P^i + \Gamma^i_{00} P^0 P^0 = 0. \quad (2.36)$$

Dalla relatività ristretta si sa che la componente 0 del quadri-impulso corrisponde all'energia relativistica,  $P^0 = E = \frac{m}{(1-v^2)}$ , cosicché, al prim'ordine in  $v$ ,  $P^0 \approx m$  e, riarrangiando i membri,

$$m \frac{d}{d\tau} P^i = -\Gamma^i_{00} m^2. \quad (2.37)$$

---

<sup>6</sup>Il quadri-momento è ben definito anche per i fotoni.

Semplificando gli  $m$ , e sostituendovi la definizione (3.41) dei simboli  $\Gamma$ , si approda a

$$\frac{d}{d\tau}P^i = -m\frac{1}{2}g^{\sigma i}(g_{\sigma 0,0} + g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}), \quad (2.38)$$

dove è previsto l'utilizzo di due tensori diagonali: la metrica  $g_{\mu\nu}$ , ricavata alla fine della sezione 2.5, e la sua inversa  $g^{\mu\nu}$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+2\phi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-2\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-2\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Quindi

$$\frac{d}{d\tau}P^i = -m\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\phi}\right)\delta^{\sigma i}(2g_{\sigma 0,0} - g_{00,\sigma}), \quad (2.40)$$

in cui la presenza della delta di Kronecker limita  $\sigma$  ad assumere i valori di  $i$  (1, 2 e 3). Uno sguardo a (2.32) è sufficiente per capire che  $g_{\sigma 0} = 0$ .

Adesso (2.24) porta al prim'ordine  $\frac{1}{1-2\phi} = 1$ ,  $g_{00,i} = -2\phi_{,i}$  e in definitiva:

$$\frac{d}{d\tau}P^i = -m\phi_{,i}, \quad (2.41)$$

in accordo perfetto con  $F = -m\nabla\phi$  (vedi Schutz, 2009 [2]). Se si fosse esaminata la parte temporale di (2.35) si sarebbe arrivati alla legge di conservazione dell'energia in un campo gravitazionale.

Questo non solo conclude la dimostrazione, ma rende persino conto della scelta  $k = 8\pi$ , operata alla fine del capitolo 1.

# Capitolo 3

## Onde gravitazionali

Si è visto che la distribuzione di materia ed energia nello spaziotempo ne determina la curvatura, guadagnandosi il ruolo di sorgente del campo gravitazionale. Lontano da essa i suoi effetti sono trattabili mediante una teoria linearizzata, quella di campo debole, e visti come una perturbazione della metrica. Il tutto è riassunto dalla (2.1)

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} :$$

$g_{\alpha\beta}$  si discosta dalla forma minkowskiana  $\eta_{\alpha\beta}$ , assunta come sfondo costante dell'universo, di una quantità  $h_{\alpha\beta}$ , dipendente dal tempo. A quest'ultima è riservato, in un certo senso, l'onere di organizzare la struttura spaziotemporale ( $g_{\alpha\beta}$ ) di ogni evento. Di fatto,  $h_{\alpha\beta}$  rappresenta un cambiamento a livello del campo gravitazionale, una variazione dalla situazione standard lorentziana che, a partire dalla sorgente, è diffusa in tutto lo spazio circostante: un segnale. Come tale non è percepito istantaneamente ovunque, bensì trasmesso con una certa velocità  $v$ . Il propagarsi di questa perturbazione nello spaziotempo è detto *onda gravitazionale*. A breve sarà elucidato come la relatività generale preveda per queste la medesima velocità della luce nel vuoto ( $v = c$ ).

L'intera trattazione si basa su un raffronto qualitativo tra questo particolare tipo di radiazioni con quelle elettromagnetiche. Sarà la luce a consigliare come muoverci.

### 3.1 Onde elettromagnetiche e gravitazionali

Le principali leggi dell'elettromagnetismo, le famose equazioni di Maxwell, sono desumibili da un'equazione che lega il quadri-potenziale  $\mathbf{A}$  (o  $A^\mu$  in componenti) alla quadri-corrente  $\mathbf{J}$  ( $J^\mu$ )

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu. \quad (3.1)$$

Fortunatamente, assumendo che la sorgente del potenziale  $\mathbf{A}$  sia una distribuzione di carica puntiforme<sup>1</sup> situata nel vuoto, è possibile fornirne una soluzione in termini di un integrale ritardato

$$\mathbf{A}(t, x^i) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(t - R, y^i)}{R} d^3y. \quad (3.2)$$

Quest'equazione riconosce nelle oscillazioni elettriche di dipolo il fenomeno responsabile della produzione di radiazioni elettromagnetiche, mentre la (3.1) in assenza di sorgenti

$$\square A^\mu = 0 \quad (3.3)$$

ne regola la propagazione nel vuoto (vedi Dominici, 2013 [5]).

Le informazioni estrapolabili risolvendo (3.3) sono notevoli. I teoremi dell'analisi di Fourier propongono una soluzione del tipo onda piana, garantendo poi che una qualsiasi altra sia derivabile dalla sovrapposizione di onde di questo stesso tipo. Quindi, esiste per  $\mathbf{A}$  una soluzione:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} e^{i k_\alpha x^\alpha}, \quad (3.4)$$

in cui  $k^\mu$  è il quadrivettore d'onda, composto dal vettore d'onda tridimensionale ( $\vec{k}$ ) e la frequenza ( $\omega$ )

$$k^\mu = (\omega, \vec{k}),$$

$x^\mu$  è il quadrivettore posizione, che localizza gli eventi sullo spaziotempo, e  $\mathbf{p}$  rappresenta il vettore polarizzazione. Qualche manipolazione su (3.4) mostra che, mentre l'onda si muove a velocità  $c = \frac{\omega}{k}$  (con  $k = |\vec{k}|$ ),  $\mathbf{p}$  giace sul piano normale alla direzione di  $\vec{k}$ , come in figura 3.1.

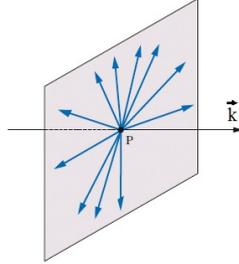


Figura 3.1: Il vettore di polarizzazione della luce giace in un piano perpendicolare a  $\vec{k}$ .

In questo modo, fissato una volta per tutte  $\vec{k}$ ,  $\mathbf{p}$  risulta individuato dalla combinazione lineare di due vettori bidimensionali,  $p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $p^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ciò è equivalente ad affermare che la radiazione elettromagnetica possiede due soli stati indipendenti di

<sup>1</sup>Una simile distribuzione di carica risulta esprimibile mediante una delta di Dirac nel punto  $x_0$  che la ospita:  $\rho = \delta(x - x_0)$ .

polarizzazione, sfasati di 90 gradi. Inutile dire che anche le onde gravitazionali devono ammettere lo stesso tipo di descrizione. Anzi, vista la sbalorditiva somiglianza delle equazioni linearizzate di Einstein<sup>2</sup>,

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi G T^{\alpha\beta}, \quad (3.5)$$

con (3.1), ci si aspetta di rinvenire un comportamento del tutto analogo. Esaminando differenze e affinità, si dovrebbe poter estendere alle onde gravitazionali le proprietà di quelle elettromagnetiche.

Prima di tutto, (3.1) e (3.5) esibiscono l'elegante forma con cui si è soliti introdurle soltanto dopo averne aggiustato le coordinate. In entrambe le situazioni si deve imporre il gauge di Lorentz:

- $$A^\mu{}_{,\mu} = 0$$

sui campi elettromagnetici;

- $$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

sui campi gravitazionali.

Ma mentre nel primo caso questa operazione è più che sufficiente ad ottenere un'equazione valida ovunque, nel secondo, in cui l'equazione è frutto di una teoria linearizzata, la legittimità appare circoscritta all'ambito di campo debole, esclusivamente al prim'ordine.

La discrepanza più evidente rimane comunque rilegata alla *natura* degli oggetti coinvolti. Nello specifico  $A^\mu$  è un vettore e  $\bar{h}^{\mu\nu}$  un tensore. Ciononostante, nel vuoto le (3.5) si esplicitano tramite

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.6)$$

identica in forma a (3.3). Pertanto diventa lecito supporre che queste siano risolte da (3.4), eventualmente riarrangiata per rendere conto della nuova quantità che vi prende parte. Così si ha:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = p^{\alpha\beta} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (3.7)$$

Come prima, è questione di un po' d'algebra mostrare che la velocità di propagazione per il *nuovo* tipo di radiazione è la stessa che nel caso elettromagnetico ( $c$ ), e che  $p^{\alpha\beta}$  appare nuovamente trasverso alla direzione di  $\vec{k}$ . Questa condizione vincola  $p^{\alpha\beta}$ , un generico tensore  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ad essere proiettato su un piano, divenendo a tutti gli effetti una matrice  $2 \times 2$ . Ma questi e altri risultati saranno esposti in maggior dettaglio nella sezione successiva.

---

<sup>2</sup>Questa volta si tiene conto del valore di  $G$ , e l'equazione è scritta nel SI.

Per adesso ci si limiti alle due costanti che in (3.1) e (3.5) precedono le sorgenti  $J^\mu$  e  $T^{\alpha\beta}$ : rispettivamente  $a = -\mu_0$  e  $b = -16\pi G$ . Il loro compito è quello di accoppiare il fenomeno che causa la generazione delle onde con l'energia che esse trasportano. Più alto risulterà il valore della costante, più lo sarà quello dell'energia associata ad esse, e, di conseguenza, più sarà facile vederle su un rivelatore. Dal loro rapporto

$$\frac{b}{a} = 2.668 \cdot 10^{-3}$$

emergono le ragioni che fanno delle perturbazioni gravitazionali degli osservabili tanto complessi: la loro energia è almeno 3 ordini di grandezza inferiore a quella elettromagnetica. Ciò implica che siano realizzati strumenti così sensibili da captare la piccolissima variazione di una parte su  $10^{21}$ . Sfortunatamente a questi livelli entrano in gioco numerosi fattori che rischiano di compromettere la misura, esaminati più avanti nel testo.

## 3.2 Equazioni di Einstein nel vuoto

Come anticipato, con la presente sezione si intende ricavare tutte le proprietà che si è detto caratterizzare le onde gravitazionali (vedi Schutz, 2009 [2]). Si riprenda in mano le (3.6), e le si riscriva esplicitando il d'Alembertiano in notazione indiciale

$$\bar{h}^{\alpha\beta,\mu}{}_{,\mu} = 0, \quad (3.8)$$

equivalente a, abbassando il primo indice di derivata parziale tramite metrica,

$$g^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = 0.$$

Quest'ultima è poi ridotta alla

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = 0, \quad (3.9)$$

richiedendo, come al solito, che i risultati siano corretti all'ordine più basso in  $\bar{h}^{\alpha\beta}$ . Si ricorda infatti di stare lavorando in condizioni di linearizzazione. A questo punto vi si sostituisca (3.7), la generica onda piana che, per i motivi spiegati poco fa, ci si aspetta le risolva. Così facendo, dal momento che la derivata parziale di  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  vale  $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu} = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta}$ , si ottiene

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.10)$$

che si annulla se e solo se  $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$ , ovvero

$$k^\nu k_\nu = 0. \quad (3.11)$$

Perciò si è indotti ad identificare il quadrivettore d'onda  $k^\mu$  con quelli che in relatività ristretta sono conosciuti come vettori di tipo-luce, cioè tangenti alle linee di mondo dei fotoni. La (3.11), riscritta per le componenti di  $\mathbf{k}$ , si legge

$$-\omega^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0,$$

che, riordinando i membri, diventa  $\frac{\omega^2}{k^2} = 1$ . Estraendo la radice

$$v_p = \frac{\omega}{k} = 1 = c,$$

che invece esprime la velocità di fase dell'onda piana (3.7). In accordo alle previsioni della sezione precedente le onde gravitazionali si muovono alla velocità della luce.

Si consideri ora il tensore di polarizzazione,  $p^{\alpha\beta}$ . Di base questo è un tensore simmetrico<sup>3</sup>, dotato al massimo di 10 componenti indipendenti. Nulla vieta però che vi siano restrizioni supplementari che possano ridurne il numero. Infatti, l'applicazione della condizione di gauge  $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$  alla (3.7) porta a

$$p^{\alpha\beta}k_\beta = 0, \quad (3.12)$$

cioè il tensore di polarizzazione deve essere ortogonale al quadri-vettore d'onda, come ci si aspettava. Ora è possibile sfruttare la libertà di muoversi all'interno della classe dei gauge di Lorentz, sottoponendo le coordinate  $\{x^\lambda\}$  all'incremento di un vettore  $\xi^\mu$  che soddisfi sia  $|\xi^\mu_{,\nu}| \ll 1$  ((2.6)), che  $(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2)\xi^\mu = \square\xi^\mu = 0$  ((2.19)). La seconda condizione consente di scegliere  $\xi^\mu$  nella forma (3.4)

$$\xi^\mu = B^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.13)$$

e, nell'esplicitare la trasformazione di gauge (2.17), che induce sul tensore di traccia inversa  $\bar{h}^{\alpha\beta}$ , si approda ad una legge di trasformazione per le componenti di  $p^{\alpha\beta}$

$$p_{\alpha'\beta'} = p_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu. \quad (3.14)$$

Adesso è fondamentale il seguente ragionamento, articolato in tre passi. (1) Un qualsiasi quadrivettore  $V^{\alpha'}$ , introdotto in  $\{x^{\lambda'}\}$ , è legato al sistema non accentato dall'equazione (2.7):  $V^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} V^\beta = (\delta^\alpha_\beta + \xi^\alpha_{,\beta})V^\beta$ . Questa relazione concede di inserire in (3.14) la contrazione con  $V^{\beta'}$  e di scrivere l'uguaglianza

$$p_{\alpha'\beta'} V^{\beta'} = (p_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu)(\delta^\alpha_\beta + \xi^\alpha_{,\beta})V^\beta,$$

che al prim'ordine trascura i prodotti con  $\xi^\alpha_{,\beta}$

$$p_{\alpha'\beta'} V^{\beta'} = p_{\alpha\beta} V^\beta - iB_\alpha k_\beta V^\beta - ik_\alpha B_\beta V^\beta + iV_\alpha B^\mu k_\mu. \quad (3.15)$$

Per il momento si accantoni (3.15) e si ritorni alla (3.14). (2) Dall'equazione (2.9) è risaputo che tra le sue proprietà, la metrica  $\eta$  di Minkowski, annovera quella di non essere sfiorata da trasformazioni gauge:  $\eta_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta}$ . Per cui, moltiplicando ambo i membri di (3.14) per  $\eta^{\alpha'\beta'} = \eta^{\alpha\beta}$ , si ha

$$\eta^{\alpha'\beta'} p_{\alpha'\beta'} = \eta^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - i\eta^{\alpha\beta} B_\alpha k_\beta - i\eta^{\alpha\beta} B_\beta k_\alpha + i\eta^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu.$$

---

<sup>3</sup>Dato che è simmetrico il tensore  $\bar{h}^{\alpha\beta}$ , a cui  $p^{\alpha\beta}$  risulta legato dalla relazione (3.7).

L'operazione permette di alzare uno degli indici in ogni termine ad eccezione dell'ultimo a destra, in cui invece è eliminato  $\eta_{\alpha\beta}$ . In altre parole

$$p^{\alpha'}_{\alpha'} = p^{\alpha}_{\alpha} - iB^{\beta}k_{\beta} - iB^{\alpha}k_{\alpha} + iB^{\mu}k_{\mu}.$$

È chiaro che  $B^{\beta}k_{\beta} = B^{\alpha}k_{\alpha} = B^{\mu}k_{\mu}$  in quanto semplice contrazione, e quindi

$$p^{\alpha'}_{\alpha'} = p^{\alpha}_{\alpha} - iB^{\beta}k_{\beta}. \quad (3.16)$$

(3) Se infine si scegliesse  $B^{\alpha}$  in maniera tale che si abbia sia

$$p_{\alpha\beta}V^{\beta} = iB_{\alpha}k_{\beta}V^{\beta} + ik_{\alpha}B_{\beta}V^{\beta} - iV_{\alpha}B^{\mu}k_{\mu},$$

che

$$p^{\alpha}_{\alpha} = iB^{\beta}k_{\beta},$$

allora da (3.15) si otterrebbe

$$p_{\alpha'\beta'}V^{\beta'} = 0 \quad \text{per } V^{\alpha'} \text{ fissato}, \quad (3.17)$$

e da (3.16)

$$p^{\alpha'}_{\alpha'} = 0. \quad (3.18)$$

Le tre condizioni (3.12), (3.17) e (3.18) insieme specificano una sottoclasse del gauge di Lorentz, detta dei *gauge trasversi a traccia nulla*. Solitamente i libri di testo riportano i tensori di queste coordinate accompagnati da lettere ad apice, come T o TT (vedi Schutz, 2009 [2]). D'ora in avanti si usufruirà della stessa convenzione:  $p^T_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha'\beta'}$ .

Per capire come tutto ciò influenzi il tensore di polarizzazione occorre specializzare sia  $V^{\alpha'}$  che  $k^{\beta'}$ : il primo in un vettore di tipo-tempo, come  $V^{\alpha'} = (1; 0; 0; 0)$ , avente soltanto la prima componente non nulla, ed il secondo in un quadrivettore d'onda che rappresenti una perturbazione propagantesi lungo l'asse  $z$ , e quindi  $k^{\beta'} = (\omega; 0; 0; \omega)$ . Così dalla (3.17) discenderebbe direttamente

$$p^T_{\alpha 0} = p^T_{0\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha, \quad (3.19)$$

che integrandola alla clausola (3.12), con  $k^{\beta'} = (\omega; 0; 0; \omega)$ , condurrebbe a

$$p^T_{\alpha 3} = p^T_{3\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha. \quad (3.20)$$

In entrambe si è fatto uso della proprietà di simmetria e, solo nell'ultima, si sono abbassati gli indici.

Finalmente, prendendo atto di (3.18), all'interno del gauge T si ha che il tensore di polarizzazione è

$$p^T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} & 0 \\ 0 & p_{12} & -p_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

e, concordemente a quanto pronosticato, diventa una matrice  $2 \times 2$ , di cui soltanto due delle componenti sono diverse. La polarizzazione delle onde gravitazionali possiede solo due gradi di libertà indipendenti, e un qualunque suo stato è raggiunto da una combinazione lineare di

$$p_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad p_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa rappresentazione assimila il concetto di campo gravitazionale con quello di campo avente spin pari a 2, che si propaga alla velocità della luce. Dalla (3.7), il tensore di traccia inversa è

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^T = p_{\alpha\beta}^T e^{ik_\mu x^\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_{11} & \bar{h}_{12} & 0 \\ 0 & \bar{h}_{12} & -\bar{h}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Si conclude facendo notare che nel gauge trasverso a traccia nulla si verifica

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^T = h_{\alpha\beta}^T. \quad (3.23)$$

La dimostrazione è immediata e la relazione segue sostituendo la condizione (3.18) nella definizione del tensore di traccia inversa  $\bar{h}$ .

### 3.3 Oscillazioni di quadrupolo

Si è detto che nella soluzione di (3.1) vi è incorporato il meccanismo per la generazione delle onde elettromagnetiche: le oscillazioni di dipolo. L'accelerazione di una particella carica in una dimensione spaziale provoca, nello spazio circostante, una perturbazione del campo ad essa accoppiato, trasmessa poi nel vuoto. Ma cosa genera invece le onde gravitazionali?

Per vederlo è sufficiente risolvere le equazione di Einstein (2.21)

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta},$$

stavolta trascritte con gli indici abbassati. Le già citate analogie con le equazioni d'onda EM<sup>4</sup> sembrerebbero raccomandare per  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  la classica soluzione a potenziali ritardati

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, x^i) = 4 \int \frac{T_{\alpha\beta}(t - R, y^i)}{R} d^3y, \quad (3.24)$$

in cui  $R$  fa le veci dello spostamento del centro  $y^i$  della distribuzione di massa:  $R = |x^i - y^i|$ . Ora, sebbene questo sia assolutamente corretto, sarebbe più opportuno seguire

---

<sup>4</sup>ElettroMagnetic, ovvero elettromagnetiche

un metodo alternativo, al cui termine  $\bar{h}$ , nonostante possa non presentarsi più aggraziato come in (3.24), autorizzi magari ad immediate elaborazioni circa i metodi di produzione delle onde (vedi Schutz, 2009 [2]).

Quindi si cominci daccapo, facendo due premesse riguardo al tensore energia-impulso  $T$ . La prima consiste nel considerare che la sua parte dipendente dal tempo esterni un comportamento sinusoidale, parte reale dell'esponenziale

$$T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} e^{-i\Omega t}. \quad (3.25)$$

L'analisi di Fourier fornisce gli algoritmi necessari a questa riduzione, per cui (3.25) è sempre verificata. L'altra supposizione invece, detta *ipotesi a rallentatore*, pone delle limitazioni alle velocità  $v$ , entro i confini della sorgente:

$$v = L\Omega \ll 1, \quad (3.26)$$

dove  $L$  è la dimensione della sorgente, e  $\Omega$  la frequenza dell'onda. In pratica è del tutto analogo a richiedere che la regione in cui  $S_{\alpha\beta} \neq 0$  sia piccola in confronto alla lunghezza d'onda  $\lambda = \frac{2\pi}{\Omega}$ , requisito violato solo da sorgenti di campo altamente relativistiche<sup>5</sup>. Come si sarà notato, la (3.25) obbliga  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  ad avere le fattezze

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} e^{-i\Omega t}, \quad (3.27)$$

che sostituito nell'equazione di partenza, eliminando il comune  $e^{-i\Omega t}$ , dà

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\alpha\beta} = -16\pi S_{\alpha\beta}. \quad (3.28)$$

Si analizzi la situazione all'esterno della sorgente, indicando con  $r$  la distanza da essa. In questa zona  $S_{\alpha\beta} = 0$  e la (3.28), divenuta

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.29)$$

può essere risolta dalla somma di onde sferiche uscenti ( $\frac{U_{\alpha\beta}}{r} e^{i\Omega r}$ ) da ed entranti ( $\frac{E_{\alpha\beta}}{r} e^{-i\Omega r}$ ) verso la sorgente:

$$B_{\alpha\beta} = \frac{U_{\alpha\beta}}{r} e^{i\Omega r} + \frac{E_{\alpha\beta}}{r} e^{-i\Omega r}. \quad (3.30)$$

Ovviamente le soluzioni fuori e dentro essa devono allacciarsi con continuità, e la pretesa di avere onde *emesse* costringe la costante  $E_{\alpha\beta}$  ad azzerarsi, ergo

$$B_{\alpha\beta} = \frac{U_{\alpha\beta}}{r} e^{i\Omega r}. \quad (3.31)$$

Per forza di cose, adesso, non può che essere la (3.28) a determinare  $U_{\alpha\beta}$ .

---

<sup>5</sup>La trattazione per questo tipo di sorgenti sarà omessa, dal momento che sconfinerebbe in una teoria non più linearizzata.

Supponendo per semplicità la sorgente puntiforme, o in ogni caso di dimensioni molto inferiori a  $\lambda$ , si integra la (3.28) in una sfera di raggio  $\epsilon$ , che poi si farà tendere a zero. Quindi, esplicitando la dipendenza dalla posizione  $x^i$ ,

$$\int (\nabla^2 + \Omega^2) B_{\alpha\beta}(x^i) d^3x = \int \nabla^2 B_{\alpha\beta}(x^i) d^3x + \int \Omega^2 B_{\alpha\beta}(x^i) d^3x = -16\pi \int S_{\alpha\beta}(x^i) d^3x. \quad (3.32)$$

Si prendano in considerazione separatamente i tre termini dopo la prima uguaglianza. Il teorema della divergenza di Gauss riesce a mutare il primo integrale di volume, interno alla sorgente (ove la forma di  $B_{\alpha\beta}$  è sconosciuta), in uno sulla superficie che la circonda

$$\int \nabla^2 B_{\alpha\beta}(x^i) d^3x = \oint \mathbf{n} \cdot \nabla B_{\alpha\beta}(x^i) dS,$$

dove invece vale (3.31). Passando alle coordinate sferiche  $\nabla = \frac{d}{dr}$  e

$$\oint \mathbf{n} \cdot \nabla B_{\alpha\beta}(r) dS = 4\pi\epsilon^2 \left( \frac{d}{dr} B_{\alpha\beta}(r) \right)_{r=\epsilon} = 4\pi\epsilon^2 \left( -\frac{U_{\alpha\beta}}{\epsilon^2} e^{i\Omega\epsilon} + \frac{U_{\alpha\beta}}{\epsilon} i\Omega e^{i\Omega\epsilon} \right),$$

che con il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  diventa

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi\epsilon^2 \left( -\frac{U_{\alpha\beta}}{\epsilon^2} e^{i\Omega\epsilon} + \frac{U_{\alpha\beta}}{\epsilon} i\Omega e^{i\Omega\epsilon} \right) = -4\pi U_{\alpha\beta}. \quad (3.33)$$

Invece il secondo integrale scompare totalmente, in quanto una nota disuguaglianza integrale legittima

$$\int \Omega^2 B_{\alpha\beta} d^3x \leq \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 \Omega^2 |B_{\alpha\beta}|_{max}$$

che fortunatamente porta a

$$(0 \leq) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \Omega^2 B_{\alpha\beta} d^3x \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 \Omega^2 |B_{\alpha\beta}|_{max} = 0. \quad (3.34)$$

Per finire il terzo integrale non ammette semplificazioni, se non una di notazione:

$$N_{\alpha\beta} = \int S_{\alpha\beta} d^3x. \quad (3.35)$$

Per il momento l'espressione delle onde gravitazionali è, all'ordine più basso,

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \frac{4}{r} N_{\alpha\beta} e^{i\Omega(r-t)}. \quad (3.36)$$

Per proseguire è impossibile non usare le proprietà tensoriali di  $T$ , che (per definizione) rientra in scena con la relazione

$$N_{\alpha\beta} e^{-i\Omega t} = \int T_{\alpha\beta} d^3x. \quad (3.37)$$

Infatti, alzando gli indici e derivando rispetto al tempo

$$-i\Omega N^{\alpha 0} e^{-i\Omega t} = \int T^{\alpha 0}{}_{,0} d^3x, \quad (3.38)$$

ci si mette nelle condizioni di sfruttare la legge di conservazione  $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ :

$$T^{\alpha 0}{}_{,0} = -T^{\alpha j}{}_{,j}. \quad (3.39)$$

In questo modo (3.38) risulta

$$i\Omega N^{\alpha 0} e^{-i\Omega t} = \int T^{\alpha j}{}_{,j} d^3x = \int \nabla(T^{\alpha j}) d^3x,$$

e applicando ancora una volta il teorema di Gauss

$$i\Omega N^{\alpha 0} e^{-i\Omega t} = \oint T^{\alpha j} n_j dS. \quad (3.40)$$

Come prima, la superficie su cui si svolge l'integrale circonda la sorgente, per cui  $T^{\alpha\beta} = 0$  e

$$i\Omega N^{\alpha 0} e^{-i\Omega t} = 0, \quad (3.41)$$

ma visto che se  $\Omega = 0$  non si avrebbe nessun onda, la (3.41) non può che implicare

$$N^{\alpha 0} = N^{0\alpha} = 0 \text{ (per ogni } \alpha) \Rightarrow \bar{h}^{\alpha 0} = \bar{h}^{0\alpha} = 0 \text{ (per ogni } \alpha), \quad (3.42)$$

tenendo già in conto la simmetria dei due tensori.

Rimane solo da risolvere l'equazione (3.37), ed il gioco è fatto. Proprio questa è ricondotta ai soli indici spaziali, grazie alle agevolazioni offerte da (3.42)

$$N^{jk} e^{-i\Omega t} = \int T^{jk} d^3x.$$

Nell'attuale formulazione è possibile impiegare il teorema del viriale tensoriale

$$\int T^{jk} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x \quad (3.43)$$

(con  $x^j$  e  $x^k$  vettori coordinati), la cui dimostrazione verrà fornita a parte nella prossima sezione. Così si ottiene

$$N^{jk} e^{-i\Omega t} = \int T^{jk} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x. \quad (3.44)$$

L'ipotesi a rallentatore approssima la componente  $T^{00} \approx \rho$  con la densità di massa newtoniana e (3.44) assume le sembianze di

$$N^{jk} e^{-i\Omega t} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int \rho x^j x^k d^3x. \quad (3.45)$$

L'integrale nell'ultimo membro rappresenta per definizione<sup>6</sup> il *tensore del momento di quadrupolo della distribuzione di massa* (vedi Misner et al., 1973 [4]):

$$I^{jk} = \int \rho x^j x^k d^3x = D^{jk} e^{-i\Omega t}, \quad (3.46)$$

servendosi dell'esponenziale alla fine per esporre la dipendenza temporale di questa quantità. Sostituendo (3.45) e (3.46) in (3.36) si ha:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \frac{4}{r} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (I_{jk}) e^{i\Omega r} = \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} (I_{jk}) e^{i\Omega r}, \quad (3.47)$$

oppure, usando l'ultima uguaglianza di (3.46),

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \frac{2}{r} \frac{d^2}{dt^2} (D_{jk} e^{-i\Omega t}) e^{i\Omega r} = \frac{2}{r} (-\Omega^2) D_{jk} e^{i\Omega(r-t)} = -\frac{2\Omega^2}{r} I_{jk} e^{i\Omega r} \quad (3.48)$$

(l'ampiezza  $\bar{h}$  si estingue con l'inverso della distanza dalla sorgente). Questa formula fornisce un potente metodo di descrizione per la generazione delle onde gravitazionali, che ora possono essere associate ad un meccanismo per la loro produzione. Infatti la (3.47) afferma che la sorgente dominante, almeno al prim'ordine nell'ipotesi a rallentatore, altri non è che la derivata seconda del momento di quadrupolo  $\frac{d^2}{dt^2} (I_{jk})$ . Al contrario del caso elettromagnetico, sono le *oscillazioni di quadrupolo* a provocare la perturbazione  $\bar{h}$  della metrica, e non quelle di dipolo, evidentemente assenti. Questo fatto riflette la conservazione del momento lineare, come ricorda  $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ , precludendo al termine dipolo di massa la possibilità di radiare (vedi Schutz & Ricci, 1999 [3]).

### 3.3.1 Libertà di gauge

Come per le onde piane anche qui rimane la libertà di eseguire una trasformazione di gauge. In particolare ponendosi nel gauge trasverso a traccia nulla, presentato poco fa, la (3.48) si semplifica notevolmente, in quanto si ha

$$\begin{aligned} \bar{h}_{zi}^T &= 0, \\ \bar{h}_{xx}^T &= -\bar{h}_{yy}^T = -\frac{\Omega^2}{r} (\tilde{Q}_{xx} - \tilde{Q}_{yy}) e^{i\Omega r}, \\ \bar{h}_{xy}^T &= -\frac{2\Omega^2}{r} \tilde{Q}_{xy} e^{i\Omega r}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

---

<sup>6</sup>Le convenzioni circa questa definizione variano in base al testo cui si fa riferimento. In questo caso si è adottata la stessa di Schutz (1985) e Misner, Thorne, Wheeler (1973).

che vanno a completare i risultati (3.42), validi invece in ogni sistema. Nelle (3.49) è visto apparire per la prima volta il tensore

$$\tilde{Q}_{ij} := I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}I^k_k, \quad (3.50)$$

conosciuto come *tensore ridotto del momento di quadrupolo* (vedi Schutz, 2009 [2]).

### 3.4 Teorema del viriale tensoriale

L'equazione (3.43) esprime il risultato noto come teorema del viriale in forma tensoriale. In questa sezione più che offrire una dimostrazione vera e propria ci si limiterà a verificarne l'identità.

Quindi si parta da  $\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x$  e, come prima cosa, si veda di trascinare sotto il segno d'integrale una delle due derivate temporali ( $\frac{d}{dt}$ ), magari in notazione indiciale

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x = \frac{d}{dt} \int (T^{00} x^j x^k)_{,0} d^3x.$$

Sottostando alle solite regole di derivazione del prodotto di funzioni si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int (T^{00} x^j x^k)_{,0} d^3x = \frac{d}{dt} \int (T^{00}{}_{,0} x^j x^k + T^{00} x^j{}_{,0} x^k + T^{00} x^j x^k{}_{,0}) d^3x.$$

Spezzando l'integrale, usufruendo della proprietà (3.39), che induce  $T^{00}{}_{,0} = -T^{0i}{}_{,i}$ , e ricordando che le derivate parziali delle componenti dei vettori coordinati danno la delta di Kronecker ( $x^\mu{}_{,\nu} = \delta^\mu_\nu$ ), si ha

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x = \frac{d}{dt} \left( \int -T^{0i}{}_{,i} x^j x^k d^3x + \int T^{00} \delta^j{}_0 x^k d^3x + \int T^{00} x^j \delta^k{}_0 d^3x \right).$$

I tre integrali si riducono come segue:

- $$\int -T^{0i}{}_{,i} x^j x^k d^3x = \int -\nabla(T^{0i}) x^j x^k d^3x = \oint -T^{0i} x^j x^k dS = 0$$

(la seconda uguaglianza è dovuta al teorema di Gauss, l'ultima al fatto che per sorgenti limitate  $T^{\mu\nu} = 0$ );

- $$\int T^{00} \delta^j{}_0 x^k d^3x = \int T^{j0} x^k d^3x$$

per gli effetti della delta;

•

$$\int T^{00} x^j \delta^k_0 d^3x = \int T^{k0} x^j d^3x$$

come al punto precedente.

Rimpiazzando i risultati l'equazione di partenza si scrive

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x = \frac{d}{dt} \left( \int T^{j0} x^k d^3x + \int T^{0k} x^j d^3x \right).$$

Come prima, nel secondo membro si può derivare sotto al segno d'integrale

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x = \int (T^{j0} x^k)_{,0} d^3x + \int (T^{0k} x^j d^3x)_{,0},$$

che per le solite norme di derivazione diventa

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x = \int T^{j0}{}_{,0} x^k d^3x + \int T^{j0} x^k{}_{,0} d^3x + \int T^{k0}{}_{,0} x^j d^3x + \int T^{k0} x^j{}_{,0} d^3x.$$

Questa volta i quattro integrali si risolvono:

•

$$\int T^{j0}{}_{,0} x^k d^3x = \int -T^{ji}{}_{,i} x^k d^3x = \int -\nabla(T^{ji}) x^k d^3x = \oint -T^{ji} x^k dS = 0$$

la prima equivalenza si deve alla legge di conservazione (3.39), mentre la terza e l'ultima derivano dagli stessi ragionamenti portati avanti nel primo punto dell'elenco precedente (teorema di Gauss e  $T^{\mu\nu} = 0$  per sorgenti limitate);

•

$$\int T^{j0} x^k{}_{,0} d^3x = \int T^{j0} \delta^k_0 d^3x = \int T^{jk} d^3x$$

dal momento che  $x^{\mu}{}_{,\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ ;

•

$$\int T^{k0}{}_{,0} x^j d^3x = \int -T^{ki}{}_{,i} x^j d^3x = \int -\nabla(T^{ki}) x^j d^3x = \oint -T^{ki} x^j dS = 0$$

analogamente al primo integrale;

•

$$\int T^{k0} x^j{}_{,0} d^3x = \int T^{k0} \delta^j_0 d^3x = \int T^{kj} d^3x = \int T^{jk} d^3x$$

proprio come al secondo punto, tenendo conto della simmetria di  $T^{\mu\nu}$ .

La catena di deduzioni porta a concludere che

$$\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x = 2 \int T^{jk} d^3x,$$

come volevasi dimostrare.

### 3.5 Effetti delle onde

Si consideri una certa regione di spazio e in essa una particella libera di seguire la propria geodetica

$$\frac{d}{d\tau}V^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0.$$

In un sistema di riferimento in cui questa si trovi inizialmente a riposo, come in uno sfondo di Lorentz<sup>7</sup>, la quadri-velocità risulta  $V^\alpha = (1; 0; 0; 0)$ , e la precedente equazione si legge

$$\frac{d}{d\tau}V^\alpha = -\Gamma^\alpha_{00}$$

o, sostituendo per il simbolo di Christoffel la forma (2.13) in condizioni di campo debole,

$$\frac{d}{d\tau}V^\alpha = -\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(h_{\sigma 0,0} + h_{\sigma 0,0} - h_{00,\sigma}). \quad (3.51)$$

Se nella zona spaziotemporale esaminata non è riscontrata la presenza di onde gravitazionali le componenti del tensore  $h_{\alpha\beta}$  svaniscono identicamente, in quanto la metrica nel sistema in questione è semplicemente piatta (vedi capitolo 2). Quindi si ha

$$\frac{d}{d\tau}V^\alpha = 0$$

e l'accelerazione della particella è inizialmente nulla. Se poi un qualche fenomeno porta delle onde a propagarsi nella zona d'interesse, improvvisamente il tensore perturbazione acquista qualche componente non nulla, e c'è bisogno di (3.51) per descrivere l'accelerazione istantanea della particella. Fortunatamente si possono sempre "sistemare" le coordinate con un gauge di Lorentz, in particolare con uno trasverso a traccia nulla ( $T$ ), e fare in modo che le onde gravitazionali si propaghino lungo l'asse  $z$ . Così, da (3.23) e (3.22), risulta che  $h_{0\sigma} = h_{\sigma 0} = h_{00} = 0$  e (tramite (3.51))

$$\frac{d}{d\tau}V^\alpha = 0.$$

La particella si trova nuovamente privata di accelerazione, anche dopo il passaggio dell'onda di gravità, portando alle conclusioni che essa rimanga indefinitivamente a riposo. Tuttavia questo risultato non è particolarmente sorprendente<sup>8</sup>. Infatti si è semplicemente scoperta l'esistenza di un sistema coordinato che rimane incollato alle particelle sottoposte a vibrazioni gravitazionali. Ma allora tutto parrebbe indicare che non vi siano conseguenze all'arrivo di onde gravitazionali. Non è così.

<sup>7</sup>Occorre fare attenzione. Non si tratta di un sistema di riferimento inerziale, come nel primo capitolo, ma di uno di quelli proposti nella sezione (2.2) per studiare i campi deboli.

<sup>8</sup>Il concetto di "particella a riposo" è dipendente dalle coordinate.

Gli effetti dell'onda, ripercuotendosi sulla metrica (2.1), circostante allo spaziotempo che investono, ne fanno oscillare il valore con la stessa frequenza di  $h_{\mu\nu}$ . Da ciò segue che a subire mutazioni saranno quelle grandezze direttamente dipendenti da  $g_{\mu\nu}$ , di cui la distanza propria (sezione 1.4) è un esempio. A tal proposito si supponga che, negli stessi istanti, due particelle P e P' si trovino rispettivamente nell'origine e in  $x = \epsilon, y = 0, z = 0$ , in un qualche sistema di assi, entrambe a riposo. Si è già avuto modo di vedere che, sebbene incalzate da onde gravitazionali, le loro coordinate rimangono inalterate (l'accelerazione è zero  $\frac{d}{d\tau}V^\alpha = \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = 0$ ). Ma si rivolga l'attenzione alla distanza propria. Per definizione (1.14) si ha

$$L = \int \sqrt{|g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta|}. \quad (3.52)$$

Da qui una serie di considerazioni e approssimazioni consente di semplificare notevolmente l'equazione (vedi Schutz, 2009 [2]). Anzitutto si tenga presente che le due particelle sono distanziate soltanto lungo l'asse  $x$  cosicché

$$L = \int_0^\epsilon \sqrt{|g_{xx}|} dx.$$

Essendo poi in condizioni di campo debole si può considerare la metrica costante in tutto il percorso da 0 a  $\epsilon$ , lungo  $x$ , nella valutazione dell'integrale precedente<sup>9</sup>:

$$L = \int_0^\epsilon \sqrt{|g_{xx}|} dx \approx \sqrt{|g_{xx}(x=0)|} \epsilon. \quad (3.53)$$

Per ultimo, sfruttando la semplice forma che la metrica  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$  assume nel gauge di Lorentz,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}^T & h_{xy}^T & 0 \\ 0 & h_{xy}^T & -h_{xx}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_{xx}^T & h_{xy}^T & 0 \\ 0 & h_{xy}^T & 1 - h_{xx}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

e sostituendone le componenti in (3.53), si ha

$$L \approx \sqrt{|g_{xx}(x=0)|} \epsilon = \sqrt{|1 + h_{xx}^T(x=0)|} \epsilon, \quad (3.55)$$

Uno sviluppo in serie dà

$$L \approx \sqrt{|1 + h_{xx}^T(x=0)|} \epsilon \approx (1 + \frac{1}{2} h_{xx}^T(x=0)) \epsilon. \quad (3.56)$$

---

<sup>9</sup>In questo caso bisognerebbe porre alcune limitazioni su  $\epsilon$ , come ad esempio il fatto che non sia troppo elevato.

L'equazione (3.56) mostra come  $L$  sia dipendente dal tempo, implicitamente attraverso  $h_{xx}^T$ , sottolineando che gli effetti delle onde saranno tanto più marcati quanto più grande risulta  $\epsilon$ . Questo spiega come mai gli odierni rivelatori siano costruiti su una grandezza scala enorme. Si evidenzia inoltre che la distanza propria non è una semplice grandezza invariante, introdotta per comodità, bensì una vera e propria quantità misurabile: lo spaziotempo tra due eventi si allunga (contrae) davvero. Più avanti sarà fornito un metodo per la sua misurazione.

Si conclude la sezione illustrando che lo studio degli effetti delle onde può essere intrapreso sfruttando il fenomeno della deviazione geodetica (sezione 1.4). Ci si affretti a riprendere le due particelle di prima, P e P', e a porle nuovamente in caduta libera. Si faccia poi in modo di collegarne le geodetiche con il vettore di connessione  $\mathbf{C}$ , che inizialmente da P raggiunge P'. Notare che se si lavorasse in un gauge di Lorentz le componenti  $C^\alpha$  resterebbero sempre costanti, sottraendo l'opportunità di trarre qualsiasi genere di conclusione. È preferibile fissare sopra P un sistema inerziale, o di tipo  $\mathcal{I}$ , che si è soliti usare in relatività generale. Qui la metrica è quella di Minkowski  $g_{\alpha\beta}(x^\lambda) = \eta_{\alpha\beta} + 0[(x^\lambda)^2]$  e, ammettendo che le particelle non siano troppo lontane, si riesce a scrivere la (1.14)

$$L = \int \sqrt{|g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|} = \int \sqrt{|(\eta_{\alpha\beta} + 0[(x^\lambda)^2]) dx^\alpha dx^\beta|}. \quad (3.57)$$

Ignorando i termini quadratici nelle coordinate si riduce a

$$L = \int \sqrt{|(\eta_{\alpha\beta} + 0[(x^\lambda)^2]) dx^\alpha dx^\beta|} = \int \sqrt{|\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|} = \int \sqrt{|-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2|}. \quad (3.58)$$

Quindi, finché le due geodetiche restano in prossimità l'una dell'altra, distanza propria e distanza coordinata coincidono. In ogni caso applicando l'equazione di deviazione geodetica si ha

$$\nabla_{\mathbf{V}} \nabla_{\mathbf{V}} C^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta V^\mu C^\nu,$$

ma dal momento che nei riferimenti di Lorentz derivata covariante e parziale si corrispondono

$$\frac{d^2}{d\tau^2} C^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta V^\mu C^\nu. \quad (3.59)$$

Nei sistemi inerziali (*i*) le velocità delle due particelle sono di nuovo  $V^\alpha = V^\beta = (1; 0; 0; 0)$  e (*ii*) il tempo proprio  $\tau$  è identico al tempo coordinato,  $\tau = t$ . Inoltre, con una semplice rotazione degli assi, (*iii*) è possibile riottenere la previa configurazione, in cui P e P' erano visti separati, diciamo di  $\epsilon$ , lungo l'asse x:  $C^\alpha = (0; \epsilon; 0; 0)$ . Operando le dovute sostituzioni in (3.59)

$$\frac{d^2}{d\tau^2} C^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} C^\alpha = R^\alpha_{00x} \epsilon = -R^\alpha_{0x0} \epsilon \quad (3.60)$$

(facendo ricorso alla proprietà di antisimmetria di  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ , rispetto allo scambio degli indici finali). L'invarianza di gauge del tensore di Riemann impone non solo che il lato

sinistro dell'equazione (3.60) sia l'espressione di una quantità indipendente dal gauge, consistente con la precedente digressione sulla coincidenza di  $C^\alpha$  e distanza propria, ma anche che le sue componenti nel sistema inerziale assumano la stessa forma che in un gauge  $T$ . La corrente interpretazione *libera* l'osservatore dalla scelta del gauge (vedi Schutz, 2009 [2]).

Ma c'è di più. Grazie all'appena ritrovata libertà, le componenti di  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  possono determinarsi prima nel gauge trasverso a traccia nulla, dove acquistano sembianze particolarmente semplici, e poi essere estese a ad ogni gauge. Per un'onda che si propaga lungo  $z$  non è difficile inserire (3.22) in (2.11) verificando che

$$R_{x0x0} = -\frac{1}{2}h_{xx,00}^T, \quad R_{y0x0} = -\frac{1}{2}h_{xy,00}^T, \quad e \quad R_{y0y0} = -\frac{1}{2}h_{yy,00}^T = -R_{x0x0} \quad (3.61)$$

sono le uniche componenti diverse da zero. In conclusione, la distanza propria esistente tra due particelle, inizialmente separate di  $\epsilon$  lungo  $x$ , obbedisce alla legge ricavata esplicitando la (3.60) attraverso le (3.61)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}C^x = -R_{x0x0}\epsilon = \epsilon\frac{1}{2}h_{xx,00}^T, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}C^y = -R_{y0x0}\epsilon = \epsilon\frac{1}{2}h_{xy,00}^T. \quad (3.62)$$

Analogamente se in principio fosse stato  $C^\alpha = (0; 0; \epsilon; 0)$  si sarebbe avuto

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}C^x = -R_{x0y0}\epsilon = -R_{y0x0}\epsilon = \epsilon\frac{1}{2}h_{xy,00}^T, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}C^y = -R_{y0y0}\epsilon = \epsilon\frac{1}{2}h_{yy,00}^T = -\epsilon\frac{1}{2}h_{xx,00}^T. \quad (3.63)$$

Una volta entrati in possesso di (3.62) e (3.63) si possono fare alcune deduzioni circa la polarizzazione delle onde, argomento del paragrafo successivo.

## 3.6 I due stati di polarizzazione

Nella sezione 3.2 si disse che le radiazioni gravitazionali possedevano soltanto due stati di polarizzazione indipendenti:

$$\oplus = \begin{pmatrix} h_{xx}^T & 0 \\ 0 & -h_{xx}^T \end{pmatrix} \quad e \quad \otimes = \begin{pmatrix} 0 & h_{xy}^T \\ h_{xy}^T & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.64)$$

il primo vincolato a  $h_{xx}^T$ , il secondo a  $h_{xy}^T$ . Si disponga un numero  $N$  di particelle sul bordo di un cerchio adagiato sul piano  $x - y$ , come in figura 3.2, e si immagini un'onda di gravità che lo attraversi perpendicolarmente (asse  $z$ ). Ipotizzando che l'onda si trovi specificatamente nello stato  $\oplus$ , con  $h_{xx}^T \neq 0$ ,  $h_{xy}^T = 0$ , da (3.62) e (3.63) si ha che mentre le distanze in  $x$  sono incrementate, in risposta all'onda, quelle in  $y$  si contraggono, e viceversa (figura 3.3).

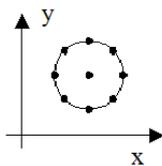


Figura 3.2: Un anello di particelle disposte nel piano  $x - y$ .

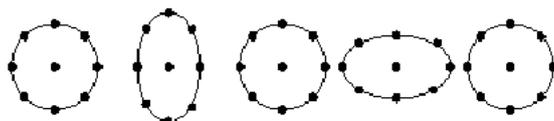


Figura 3.3: Con l'arrivo della perturbazione  $\oplus$ , l'anello di figura 3.2 si allunga verso  $x$ , contraendosi in  $y$ , o viceversa. L'effetto è lo stesso che si otterrebbe ponendo le mani sui poli di una sfera, o sull'equatore, comprimendola.

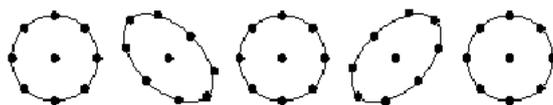


Figura 3.4: Il passaggio dell'onda  $\otimes$  sottopone l'anello iniziale 3.2 al passaggio degli stadi rappresentati in figura.

Al contrario, con l'onda attiva nello stato  $\otimes$  si avrebbe  $h_{xx}^T = 0$ ,  $h_{xy}^T \neq 0$ . Lo spazio si contrae (o si espande) lungo  $x$  e  $y$  contemporaneamente, dando adito alla deformazione dell'anello rappresentata in figura 3.4.

È evidente che  $\oplus$  e  $\otimes$  possono essere ottenuti l'uno dall'altro con una semplice rotazione di 45 gradi, diversamente dal caso elettromagnetico, in cui invece i due stati distavano angularmente di 90 gradi (vedi Schutz & Ricci, 1999 [3]).

Con questo si esaurisce l'analogia elettromagnetismo-gravitazione. L'aver notato la somiglianza delle relative equazioni di campo ha condotto alla scoperta di tutte le informazioni riportate fino ad ora. Nel prossimo capitolo si affronterà il problema della rivelazione, esaminando i problemi ad essa legati e le metodologie impiegate ai fini dell'osservazione di questi misteriosi campi.

# Capitolo 4

## Rivelazione delle onde

Nello scorso capitolo si è affermato come, per accorgersi della presenza di eventuali onde gravitazionali, fosse sufficiente misurare la distanza tra due oggetti, verificandone o meno la variabilità. Ma a questo punto sorge spontanea una domanda: come e con quale strumento si può effettuare una simile operazione? Se è vero che lo spazio si contrae, non dovrebbe toccare la stessa sorte anche all'oggetto che esegue la misura?

La risposta verrà fornita a breve, e con essa l'illustrazione di alcuni dei metodi più efficaci che permettono la rivelazione di onde. Quindi di presenterò LIGO, argomento principale del quarto capitolo, l'interferometro che ha percepito per primo l'arrivo di un'onda di gravità.

### 4.1 Come misurare gli effetti delle onde

Nella sezione 3.5 si è fatto uso dell'equazione di deviazione geodetica per riuscire a interpretare le conseguenze delle onde su un sistema di due particelle, P e P', in caduta libera nello spaziotempo. Il risultato della discussione è stato un'equazione differenziale, (3.60), che descriveva l'onda come una forza agente su P' osservata da un sistema inerziale solidale a P. In particolare, con le giuste condizioni al contorno, le componenti del vettore  $C^\alpha$  assumevano le fattezze di quelle della distanza propria lungo le 4 direzioni coordinate, e la (3.60) diventava un'equazione per l'accelerazione di P' (secondo P)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} C^i = R^i{}_{00j} C^j = -R^i{}_{0j0} C^j, \quad (4.1)$$

riscritta<sup>1</sup> senza specificare nulla riguardo alla configurazione delle particelle o a  $C^\alpha$ . Nulla vieta poi di includere nel quadro altre forze, agenti su P' o su P. Come nel caso classico, per rendere conto della situazione è sufficiente inserire in (4.1) le componenti

---

<sup>1</sup>Si nota subito che gli indici di  $C$  escludono la componente 0, dovuto al fatto che l'accelerazione è un vettore di tipo-spazio.

delle accelerazioni causate dalle risultanti delle forze  $F_P^i$  e  $F_{P'}^i$ , in azione su entrambe le particelle. Così

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} C^i = -R^i{}_{0j0} C^j - \frac{1}{m_P} F_P^i + \frac{1}{m_{P'}} F_{P'}^i, \quad (4.2)$$

dove  $m_{P'}$  ( $m_P$ ) è la massa di P' (P). Adesso è facile rispondere alla domanda iniziale, dato che (4.2) permette di prevedere il comportamento di sistemi materiali sotto l'influenza di onde. Sorprendentemente emerge che anche un semplice righello riuscirebbe a misurare la deformazione dello spazio! Infatti gli atomi che lo costituiscono sono legati assieme da forze di tipo elettrico, ben più forti (da quanto detto nel capitolo 3) di quelle di tipo gravitazionale. In questo modo, il secondo e terzo termine nel membro di destra dominano (4.2) e, di conseguenza, il righello non si "dilata" ("restringe"), contrariamente allo spazio tra due particelle libere, che ora si potrebbe misurare.

Con quest'equazione si potrebbe cominciare una trattazione sui *rivelatori risonanti* (vedi Schutz, 2009 [2]). In pratica le radiazioni di gravità prelevano energia dalle sorgenti che le generano e la trasportano per tutto lo spazio. Questo finché non incontrano oggetti particolari, a cui possono conferirla, seppur in minima parte. Si parla quindi di rivelatori risonanti, o rivelatori a barra. In prima approssimazione non sono che semplici oscillatori armonici dotati della peculiarità di entrare in risonanza quando su di essi incide la perturbazione in questione. Tuttavia l'ordine di grandezza previsto per l'ampiezza da captare si aggira attorno a  $10^{-21}$ . Sfortunatamente, non è così semplice raggiungere il grado di precisione necessario alla rivelazione. Non solo si presenterebbero problemi legati alla fisica dei materiali, come l'agitazione termica o l'attenuazione del rumore sismico quotidiano, ma anche problemi di natura quantistica. In particolare la sfida di osservare vibrazioni sotto il limite quantico<sup>2</sup> rimane tutt'ora aperta. Pertanto, l'improbabilità di portare a termine l'impresa preposta porta ad omettere una dissertazione sugli argomenti appena elencati.

In alternativa, si potrebbe pensare di sfruttare il ruolo privilegiato che la luce ricopre in relatività. Così per avere una stima della distanza propria, esistente tra due oggetti, è sufficiente applicare il principio che regola il funzionamento dei radar. Misurando il tempo impiegato da un fotone nel muoversi dalla particella A a quella B si riesce a valutare la lunghezza  $L$  del cammino compiuto. Interviene poi una particolarità della radiazione elettromagnetica, quella di spostarsi sempre lungo linee di mondo nulle ( $ds^2 = 0$ ), che porta ad identificare  $L$  con un valore di distanza propria. L'opportunità di misurare distanze proprie tramite la luce (discussa nella prossima sezione) è alla base dell'interferometria laser, eccellente meccanismo di misura (mostrato nella sezione 4.4) anche in uno spaziotempo curvo.

---

<sup>2</sup>L'eccitazione indotta da oscillazioni tanto piccole pare indurre negli oscillatori vibrazioni con energia inferiore a quella di un fotone.

## 4.2 Distanza propria e luce

Si considerino, ancora una volta, due particelle in caduta libera, A e B, separate da una distanza  $L$ . Si fissi, solidale ad A, l'origine di un sistema trasverso a traccia nulla, orientato in maniera tale che  $B = (0; L; 0; 0)$ . Si immagini poi che un'onda gravitazionale incida nella zona in cui si è predisposto il riferimento  $T$ , diretta lungo il suo asse  $z$ . In questo caso la metrica dello spaziotempo corrisponde alla forma (3.54), che si riduce a

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_{xx}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h_{xx}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

scegliendo  $\oplus$  come stato di polarizzazione. Espressa tramite l'elemento di linea, la (4.3) risulta

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_{xx}^T)dx^2 + (1 - h_{xx}^T)dy^2 + dz^2. \quad (4.4)$$

Alla fine del capitolo 3 si è mostrato come le particelle nei sistemi  $T$  risultassero inerti alle onde gravitazionali, rimanendo nella medesima posizione per tutta la durata dell'oscillazione. Come si vedrà, questo non preclude la possibilità di misurare l'allungamento spaziale. Basta studiare gli effetti delle onde, non sulle coordinate, ma sulla *velocità coordinata*<sup>3</sup> della luce.

Si faccia in modo che da A sia emesso un fotone lungo  $x$ , in direzione di B. Raggiunto l'ostacolo questo vi rimbalzerà contro, ritornando verso A. Quindi si fornisca A di un orologio e si cronometri il tempo  $t_{return}$  intercorso tra emissione e ricezione. A quel punto per risalire alla distanza propria  $L$  occorre portare a termine la semplice operazione

$$L = \frac{t_{return}}{2}c, \quad \text{con } c = 1.$$

Si vede che l'obbiettivo primario è la determinazione di  $t_{return}$ , da cui si riesce a risalire a  $t(x)$ , la funzione che esprime il tempo di volo tra l'origine e un qualsiasi punto  $x$ , situato sull'omonimo asse. Ecco come agevolare la misurazione.

Il tragitto da A a B non solo è percorso da un fotone, cioè  $ds^2 = 0$ , ma non prevede nemmeno alcun cambiamento in  $y$  o  $z$ , ovvero  $dy = 0, dz = 0$ . Le semplici deduzioni vanno utilizzate in (4.4) per ottenere

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_{xx}^T)dx^2 = 0, \quad (4.5)$$

---

<sup>3</sup>Si ricorda che la velocità coordinata  $\frac{dx}{dt}$  è connessa a quella propria  $\frac{dx}{d\tau}$  dal fattore di lorentz  $\gamma = \frac{dt}{d\tau}$ . La relazione si legge  $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{dt}$ .

da cui, riorganizzandone i membri, è immediato ottenere l'espressione per la velocità coordinata della luce<sup>4</sup>:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_{xx}^T}. \quad (4.6)$$

Dunque, assumendo che il fotone sia emesso al tempo  $t = t_e$  nei modi specificati sopra, il tempo  $t_L$  di arrivo in  $x = L$  è dato dall'identità:

$$t_L = t_e + \int_{t_e}^{t_L} dt. \quad (4.7)$$

Manipolando l'integrale con un po' di semplice algebra (moltiplicando e dividendo per  $dx$ ) la (4.7) risulta

$$t_L = t_e + \int_{t_e}^{t_L} \frac{dt}{dx} dx = t_e + \int_{t_e}^{t_L} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} dx, \quad (4.8)$$

che, grazie alla (4.6), si scrive

$$t_L = t_e + \int_0^L \sqrt{1 + h_{xx}^T(t(x))} dx \quad (4.9)$$

(modificando opportunamente il range d'integrazione). Nella (4.9) si è esplicitata la dipendenza di  $h_{\mu\nu}^T$  dal tempo  $t$ . La scrittura  $h_{xx}^T(t(x))$ , in particolare, è significativa del fatto che si debba conoscere il tempo necessario a raggiungere la locazione in  $x$  per poter calcolare il campo d'onda nell'istante in cui il fotone vi transita. La funzione da individuare si trova così anche dentro l'integrale, e la (4.9) diviene un'equazione implicita. Fortunatamente in teoria linearizzata si può comunque dare una soluzione approssimata, utilizzando la proprietà (2.2). Infatti si propone per  $t(x)$ <sup>5</sup> la stessa dipendenza funzionale che si aveva in uno spaziotempo piatto,

$$t(x) = t_e + x,$$

dato che le correzioni dovute alla perturbazione è atteso introducano in (4.9) termini del second'ordine in  $h_{xx}^T$ . Sempre (2.2) porta a sviluppare in serie il contenuto dell'integrale a secondo membro:

$$t_L = t_e + \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^T(t_e + x)\right] dx = t_e + L + \frac{1}{2} \int_0^L h_{xx}^T(t_e + x) dx. \quad (4.10)$$

---

<sup>4</sup>Notare che per la velocità coordinata della luce vale  $\frac{dx}{dt} \leq c$ . Questo non comporta una violazione dei postulati della relatività, poichè rappresenta, per l'appunto, una velocità coordinata.

<sup>5</sup>Ci si riferisce a quando compare nell'argomento di  $h_{xx}^T$ .

Lo stesso ragionamento è naturalmente valido per il tragitto di ritorno, da B ad A

$$t_{return} = t_L + L + \frac{1}{2} \int_0^L h_{xx}^T(t_e + L + x) dx = t_e + 2L + \frac{1}{2} \left( \int_0^L h_{xx}^T(t_e + x) dx + \int_0^L h_{xx}^T(t_e + L + x) dx \right). \quad (4.11)$$

Nei riferimenti  $T$  tempo proprio e coordinato sono la stessa cosa, e quindi a tutti gli effetti misurabili.

Con l'apparato costruito, sarà sufficiente tenere conto di eventuali variazioni nel tempo di ritorno  $t_{return}$  rispetto a quello di partenza  $t_e$  per riscontrare modifiche nella distanza propria  $L$ . Matematicamente ciò si traduce nella seguente derivata di (4.11)

$$\frac{dt_{return}}{dt_e} = 1 + \frac{1}{2} \left[ h_{xx}^T(t_e + 2L) - h_{xx}^T(t_e + L) + h_{xx}^T(t_e + L) - h_{xx}^T(t_e) \right] = 1 + \frac{1}{2} \left[ h_{xx}^T(t_e + 2L) - h_{xx}^T(t_e) \right] \quad (4.12)$$

(vedi Schutz, 2009 [2]). Il risultato è alquanto sbalorditivo. Controllando il tasso di cambiamento del tempo di ritorno di un fotone si riesce a determinare la metrica dell'onda nel punto esatto in cui la particella è emessa. Si evidenzia che la (4.12) dipende soltanto dal valore che  $h^T$  assume in A, lasciando B, dove avviene la riflessione, privo di una parte nel processo. Una situazione differente si avrebbe nel caso in cui l'onda non si propagasse parallelamente all'asse  $z$ . Senza entrare nei dettagli, se tra vettore d'onda  $\vec{k}$  e  $z$  vi fosse una distanza angolare  $\theta$  gli stessi ragionamenti di prima condurrebbero alla seguente relazione a tre termini (vedi Schutz & Ricci, 1999 [3])

$$\frac{dt_{return}}{dt_e} = 1 + \frac{1}{2} \left[ [1 - \sin\theta] h_{xx}^T(t_e + 2L) - [1 + \sin\theta] h_{xx}^T(t_e) + 2\sin\theta h_{xx}^T(t_e + L) \right], \quad (4.13)$$

a cui stavolta prende parte anche il valore dell'ampiezza d'onda al tempo di riflessione.

Utilizzando un'intera onda elettromagnetica, con una certa frequenza  $\nu$ , e non solo un fotone, vale l'uguaglianza

$$\frac{dt_{return}}{dt_e} = \frac{\nu_{return}}{\nu_e}. \quad (4.14)$$

Si implica così la possibilità di stimare l'ampiezza della perturbazione esaminando cambiamenti nel redshift dell'onda emanata dall'emettitore. In conclusione (4.12) e (4.14) mettono a disposizione due modalità per stabilire gli effetti apportati dalle radiazioni di gravità sullo spaziotempo. La scelta su quale delle due quantità monitorare, se tempo  $t_{return}$  o frequenza  $\nu_{return}$ , resta a carico dello scienziato. In ogni caso, precisione ed efficacia dell'attrezzatura strumentale, coinvolta nell'operazione di misura, giocano un ruolo non indifferente nell'indicare la strada da seguire.

### 4.3 Rivelatori a fascio

I rivelatori che fanno uso della luce per scovare onde gravitazionali, come quello della sezione precedente, sono detti *rivelatori a fascio*. Il metodo più semplice per realizzarne

uno è utilizzare i transponders che le navicelle spaziali impiegano per comunicare con la base di terra. Misurando il tempo di ritorno  $t_{return}$  dei segnali inviati all'abitacolo, gli ingegneri della base sono in grado di tracciarne la posizione. È chiaro che se venisse registrata qualche fluttuazione in  $t_{return}$ , le cause del fenomeno potrebbero essere attribuite all'arrivo di onde gravitazionali. Sfortunatamente però le cose sono più complicate di così. Anche il migliore degli orologi non è stabile oltre la 19-esima cifra significativa, ponendo seri limiti sull'accuratezza delle misure temporali. Per di più, con questa precisione, non si potranno osservare ampiezze aventi ordine di grandezza pari o inferiore a  $10^{-20}$ , dove purtroppo giacciono la maggior parte delle onde. Per sopperire al problema si ricorre all'uso di interferometri (vedi LIGO, online [6]).

## 4.4 Interferometri

Questi oggetti sono largamente utilizzati in ogni branca della fisica. Nello specifico si occupano di sovrapporre fasci di luce per creare, e successivamente analizzare, disegni d'interferenza su un fotorivelatore. Come il nome suggerisce, tutti quanti funzionano in base a tale principio, differenziandosi soltanto in forma e dimensione. Tuttavia, la comune evoluzione dall'interferometro di Michelson, lo stesso usato alla fine del 19-esimo nel celeberrimo esperimento di Michelson-Morley, spinge questi oggetti ad avere un design di progettazione quantomeno simile.

Nella loro configurazione standard (mostrata in figura 4.1) i moderni interferometri fanno incidere la potente radiazione di un laser sopra un *beam splitter*, una sorta di specchio semitrasparente che riflette metà della radiazione ricevuta e ne trasmette l'altra metà (*splitting*). L'oggetto è disposto in maniera che i due nuovi fasci si allontanino, l'uno dall'altro, in direzioni tra loro perpendicolari. Questi seguono fino in fondo i rispettivi bracci,  $b_1$  e  $b_2$ , dove incontrano uno specchio che li riflette indietro, verso il beam splitter. Qui sono riuniti in un unico fascio (*merging*), che in generale non avrà le stesse caratteristiche ondulatorie di quello iniziale. In base alla distanza percorsa dalle onde secondarie<sup>6</sup>, queste interferiranno in maniera diversa al momento del merging. Il disegno d'interferenza (*pattern*) viene impresso su un fotorivelatore che registra la forma dell'onda finale e consente di risalire anche alla più piccola differenza nella lunghezza dei bracci. Gli interferometri adibiti alla rivelazione di onde gravitazionali sono costituiti esattamente con le stesse modalità, e possono percepire variazioni oltre la decimillesima parte della larghezza del protone.

Pertanto se ne disponga uno in modo che  $b_1$  e  $b_2$  giacciono lungo gli assi  $x$  e  $y$  di un sistema di riferimento, sapendo che in un momento non precisato il piano verrà attraversato da una radiazione con polarizzazione  $\oplus$  in direzione  $z$ . Durante il transito, si osserva (sezione 3.5) lo stiramento delle distanze in  $x$  mentre si assiste al restringimento di quelle in  $y$ , o viceversa. Se inizialmente  $b_1 = b_2$ , il processo causa un divario nella

---

<sup>6</sup>Quelle risultanti dal processo di splitting.

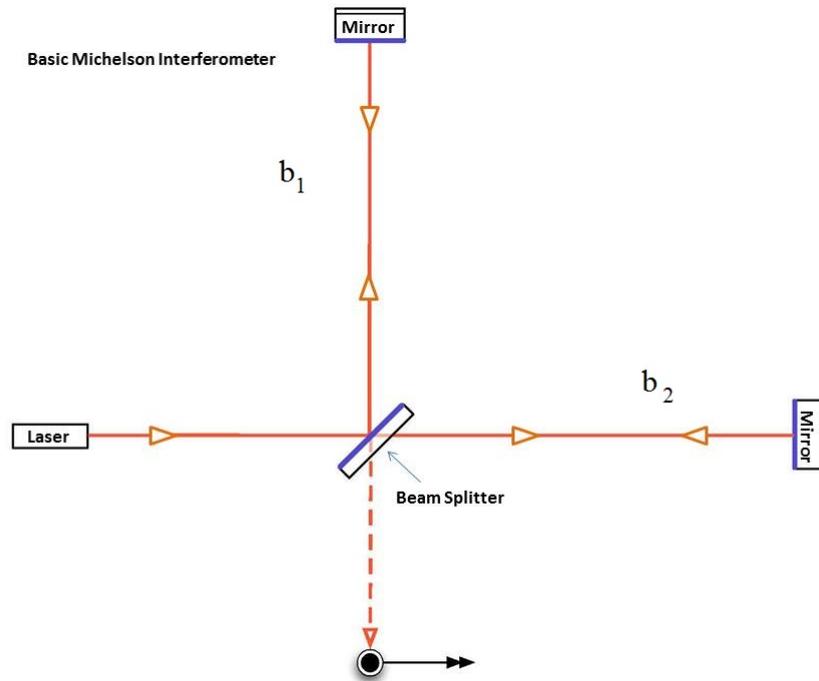


Figura 4.1: Schema dell'interferometro di Michelson.

lunghezza effettiva dei bracci, e la conseguente discrepanza nei tempi di ritorno al beam splitter. I fasci secondari verranno disallineati in fase, e durante il merging saranno costretti a subire interferenza costruttiva o distruttiva, captata dall'interferometro che, nel caso, segnala il passaggio della perturbazione. Purtroppo non tutte le onde sono suscettibili di una rivelazione. Per esempio, se nelle stesse condizioni attuali si fosse invece fatto uso di una polarizzazione  $\otimes$ , le lunghezze dei bracci sarebbero rimaste costanti e l'onda inosservata.

Con gli interferometri si risolve il problema di dover integrare un rivelatore a fascio con un orologio, visto che la sua funzione è svolta da uno dei bracci. Il tempo speso dalla luce a viaggiarvi fornisce un *riferimento* per il tempo di ritorno della luce nell'altro braccio, rendendo possibile misurarne i cambiamenti. Laser e specchi lavorano molto più stabilmente di qualsiasi altro orologio atomico.

Il primo strumento a registrare un'onda gravitazionale è stato proprio un interferometro: LIGO, le cui caratteristiche tecniche saranno presentate nella sezione a seguire.

## 4.5 LIGO

LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observer*) è il più grande osservatorio di onde gravitazionali al mondo. Esso consta di due enormi interferometri laser situati ad oltre 3000 km l'uno dall'altro: il primo si trova ad Hanford, nello stato di Washington, il secondo a Livingston, Louisiana. Entrambi non sono altro che interferometri di Michelson, figura 4.1, implementati con tecnologie aggiuntive che ne migliorano l'efficienza.

In primis la lunghezza dei bracci è stata estesa da 11 m<sup>7</sup> a 4 km, conquistando il primato di più grandi interferometri mai creati. La scelta è una diretta conseguenza dell'equazione (3.56), che comunica la possibilità di incrementare la sensibilità dello strumento semplicemente aumentando la distanza da far percorrere al laser. Tuttavia, anche con quest'espedito,  $b_1$  e  $b_2$  non sarebbero ancora abbastanza lunghi da mostrare le alterazioni cercate.

Così altri due specchi semitrasparenti sono aggiunti alla struttura. Sono sistemati subito dopo il beam splitter, e allineati lungo i bracci in modo da acconsentire l'attraversamento alla luce appena "splittata", riflettendo invece il fascio di ritorno (figura 4.2). Il laser viene imprigionato nei 4 km dei rami ( $b_1$  e  $b_2$ ), che diventano più simili a vere e proprie cavità, dette *cavità di Fabry Perot*. Al loro interno, prima di poter raggiungere il fotorivelatore, la radiazione elettromagnetica subisce all'incirca 280 riflessioni che portano da 4 a 1120 km il cammino dei fasci luminosi. La precisione raggiunta è quindi adeguata al fine.

Ma se la lunghezza regola la sensibilità, la potenza del laser ha un ruolo fondamentale nel determinarne la risoluzione. Più saranno i fotoni a muoversi nello strumento, più il pattern d'interferenza risulterà definito. Affinchè un oggetto delle dimensioni di LIGO operi al pieno delle sue capacità, si stima che il laser dovrebbe avere una potenza di 750 kW, contro i 200 W attuali. Nella pratica questo è ovviamente irrealizzabile. Però se tra laser e beam splitter facesse la sua comparsa l'ennesimo specchio translucido, detto *specchio a riciclaggio di potenza*, si otterrebbe lo stesso effetto senza essere costretti ad alimentare un fascio di 750 kW. Anche in quest'occasione lo specchio permette il passaggio solo alla luce che abbandona l'emettitore, reindirizzando al beam splitter quella che dai bracci tende a ritornare verso il generatore. È la configurazione stessa dell'apparecchiatura a consentire un simile fenomeno. Prima di far entrare in azione le cavità di Fabry Perot, l'allineamento degli specchi assicura la possibilità di amplificare il raggio luminoso fino al valore richiesto (vedi LIGO, online [6]-[7]). L'aspetto finale è quello di figura 4.4. Le modifiche apportate fanno rientrare LIGO nella categoria dei doppio interferometro di Fabry-Perot-Michelson a riciclaggio (*Dual Recycled Fabry-Perot-Michelson Interferometer*).

---

<sup>7</sup>Questa grandezza rappresenta la lunghezza dei bracci nell'esperimento di Michelson-Morley.

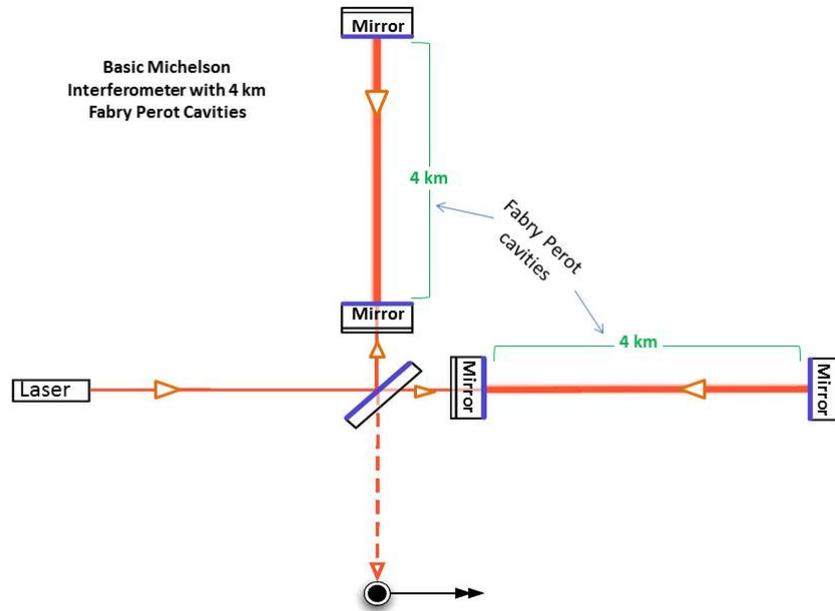


Figura 4.2: L'interferometro di Michelson, integrato con le cavità di Fabry Perot.

## 4.6 I due rivelatori di LIGO

Uno strumento come LIGO non potrà mai e poi mai lavorare in solitaria, al contrario di un qualsiasi altro osservatorio. I due interferometri che lo compongono sono sì progettati per rivelare le onde gravitazionali, ma allo stesso tempo, in virtù dell'accuratezza estrema, sentono anche la minima vibrazione provocata da sorgenti terrestri poste a migliaia di chilometri. Terremoti, rumore acustico e persino le fluttuazioni interne del laser potrebbero mascherare, o peggio imitare, il segnale di arrivo di un'onda. Due interferometri distanziati nello spazio, invece, percepirebbero le perturbazioni locali in tempi differenti, rendendo più facile agli scienziati poterle identificare ed escludere. In questo modo ogni rivelatore agisce come filtro di rumore per l'altro. È chiaro poi che soltanto segnali della *stessa ampiezza* registrati nello *stesso tempo* saranno ascrivibili ad onde gravitazionali.

La collaborazione di LIGO con un interferometro del medesimo tipo, VIRGO, in Italia (in prossimità di Pisa), accentua il grado di affidabilità dell'osservazione.

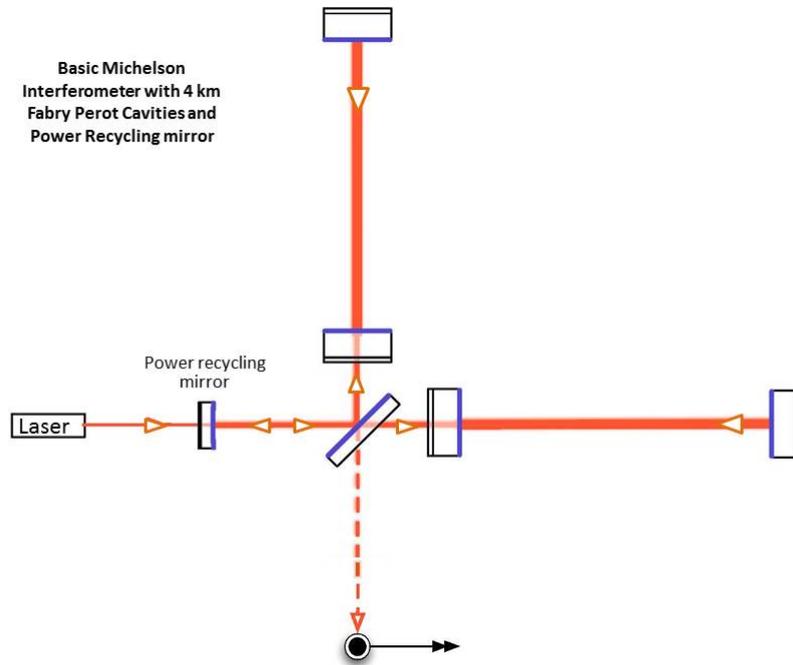


Figura 4.3: Schema di uno degli interferometri di LIGO.

#### 4.6.1 Isolamento

Come già detto, la sensibilità di LIGO lo porta a registrare ogni piccolo movimento degli specchi interni, sia esso dovuto a variazioni della metrica o meno. Se non si prendessero straordinarie contromisure, risulterebbe impossibile distinguere un'onda di gravità da un treno in corsa, anche usando due interferometri. Per questo si ricorre ad un sistema di *isolamento sismico interno*. È un dispositivo che ascolta le frequenze dei movimenti del suolo e applica alla strumentazione, a cui è connesso, dei contro-movimenti per eliminarli. Questo meccanismo è detto *smorzamento attivo*.

In secondo luogo tutti gli specchi sono sostenuti all'estremità di un pendolo a quattro stadi, denominato *quad*, costituendo un sistema di *smorzamento passivo*. La sua funzione è quella di cancellare tutti i disturbi che lo smorzamento attivo non ha potuto azzerare.

Infine la parte di struttura riservata al passaggio del laser è nelle condizioni di poter ospitare il vuoto sostenuto più puro al mondo, secondo soltanto al LHC del CERN. Al suo interno la pressione dell'aria risulta essere un trilionesimo del suo valore al livello del mare. Se la situazione fosse diversa, e nei bracci dell'interferometro si potessero trovare delle molecole, potrebbe avere luogo uno scattering indesiderato del fascio di luce, che interagirebbe con gli esiti del fotorivelatore, compromettendo irrimediabilmente la misura.

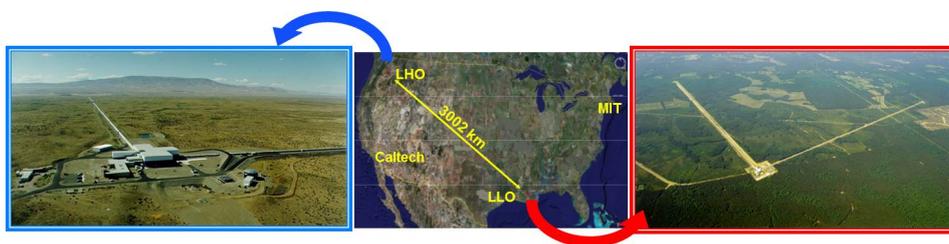


Figura 4.4: Al centro è mostrata l'ubicazione geografica degli interferometri LIGO. A sinistra compare quello posto a ad Hanford, a destra quello di Livingstone.

Tutto è studiato nei minimi dettagli: le oscillazioni spaziotemporali devono poter essere avvistate (vedi LIGO, online [6]).

## 4.7 Che cosa ha visto LIGO? Il futuro delle onde gravitazionali

Il 14 settembre 2015 LIGO, con la collaborazione VIRGO, annuncia la ricezione di un segnale distinto, originatosi a 1,3 miliardi anni-luce dalla terra, dovuto alla fusione di due buchi neri appartenenti ad un sistema binario nel quale l'uno ruotava intorno all'altro. Citando le parole di Fulvio Ricci, il coordinatore della collaborazione VIRGO (vedi Greshko, online [8]):

“Avevano una massa rispettivamente di 36 e 29 volte superiore a quella del Sole. Si sono avvicinati a una velocità impressionante, vicina a quella della luce. Più si avvicinavano, più il segnale diventava ampio e frequente, come un sibilo acuto; quindi è avvenuta la collisione, un gigantesco scontro dal quale si è formato un unico buco nero. La sua massa è la somma di quelle dei due buchi neri, a eccezione della quantità di energia liberata sotto forma di onde gravitazionali”.

Questo è il primo evento cataclismico documentato. Ciò si è reso possibile soltanto grazie agli innumerevoli sforzi di fisici ed ingegneri, che da vent'anni perfezionano quello che risulta essere lo strumento più accurato di sempre. In futuro ci si aspetta che LIGO possa riuscire ad osservare anche avvenimenti meno energetici, come l'esplosione di una supernova o la coalescenza di una stella di neutroni, per arrivare un giorno a cogliere i debolissimi resti di radiazione gravitazionale creati al momento del Big bang.

Al momento è in cantiere la missione spaziale LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*), la cui data di lancio è prevista per il 2034(vedi LISA, online [9]). Consisterà in una costellazione di 3 satelliti artificiali posti ai vertici di un triangolo equilatero, avente lato pari a 5 milioni di chilometri (riferimento alla figura 4.5).

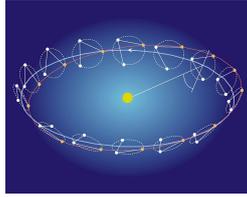


Figura 4.5: I satelliti LISA in orbita attorno al sole.

Mentre il sistema rivoluzionerà attorno al sole, alla distanza di 1 unità astronomica, un interferometro laser controllerà costantemente la separazione satellitare<sup>8</sup>. Non trovandosi più ancorato al suolo sarà richiesta una sensibilità di gran lunga più bassa, che nel caso migliore risulterebbe di circa  $10^{11}$  m. Sarà comunque sufficiente ad osservare gli energetici eventi che avvengono nella Via Lattea e nelle galassie vicine.

Con lo spettro delle onde gravitazionali si apre una nuova finestra sulla natura. Chissà che, sfruttando la grande immaginazione di cui è dotato, l'uomo non riesca ad approfondire la propria conoscenza della struttura dell'universo primordiale, e ad elaborare l'utopica teoria del tutto.

---

<sup>8</sup>I laser avranno una potenza di 1 watt, e saranno osservati tramite piccoli telescopi di 30 cm di diametro.

# Bibliografia

- [1] Casadio, R. (2015), *Elements of Relativity*, [e-book] Disponibile presso: Scuola di Scienze, Univeristà di Bologna, <<http://campus.unibo.it>> [Ultimo accesso 12 Novembre 2015].
- [2] Schutz, B. F., *A first course in general relativity (2 ed.)*, Cambridge Univ. Press. (2009).
- [3] Schutz, B. F. & Ricci F. (1999), *Gravitational Waves, Sources and Detectors*, [e-book] Disponibile presso: <<http://arxiv.org/pdf>> [Ultimo accesso 26 Maggio 2010].
- [4] Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. , *Gravitation*, W. H. Freeman (1973).
- [5] Dominici, D. (2013), *Forma covariante delle equazioni di Maxwell*, [e-book] Disponibile presso: <<http://quinto.fi.infn.it>> [Ultimo accesso 4 Ottobre 2013].
- [6] LIGO Lab | Caltech | MIT, [online] Disponibile presso: <<https://www.ligo.caltech.edu>> [Ultimo accesso 2 Marzo 2016].
- [7] LIGO - Wikipedia, [online] Disponibile presso: <<https://it.wikipedia.org>> [Ultimo accesso 2 Marzo 2016].
- [8] Greshko, M. (2016), *Trovate le onde gravitazionali*, [e-journal] Disponibile presso: <<http://www.nationalgeographic.it/scienza>> [Ultimo accesso 11 Febbraio 2016].
- [9] LISA - Wikipedia, [online] Disponibile presso: <<https://it.wikipedia.org>> [Ultimo accesso 2 Marzo 2016].